新編 高専の数学問題集 第2版 1・2・3補遺

この補遺は「新編 高専の数学問題集 第2版 1・2・3」に収録しなかった大学編入学試験問題を掲載しています．

章・節の組み方と出題大学名と出題時期の記載の仕方は上記問題集に準じています．解法およびヒントで，着想の異なる方法には(i)，(ii)など区別して記述しています．

「問題集」とこの補遺に掲載されていない大学編入学試験の，興味のある問題とその解，またここに掲載されているものと異なる着想の解法があれば，こちらの「高専の数学会議室」に書き込んでいただければ幸いです．順次本文に繰り込み予定ですが，採用された解法等は森北出版に帰属することをご了承下さい．

著 者

補遺の内容

新編 高専の数学問題集 第2版 1

- 命題・等式・不等式
- 三角関数
- 平面上の図形
- 個数の処理

新編 高専の数学問題集 第2版 2

- 数列
- 微分法
- 積分法
- ベクトルと図形
- 行列と行列式

新編 高専の数学問題集 第2版 3

- 微分法
- 積分法
- 偏微分と重積分
- 微分方程式
- 複素数

付録

- 確率
- 統計

問題集　1

3　命題・等式・不等式

§6. 集合と命題

6.1　$4 \pm \sqrt{3}$，$3 \pm 2i$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 2 組の 2 つの解の積を q，2 つの解の和を p_1 と p_2 とすると，方程式は

$$(x^2 - p_1x + q)(x^2 - p_2x + q) = 0$$

となる．

6.2　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ 3 次方程式の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$$

a_n の定義により

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha + \beta + \gamma = -p \\ a_2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = p^2 - 2q \\ a_3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= -p^3 + 3pq - 3r \end{aligned}$$

したがって a_1，a_2，a_3 は整数である．α，β，γ が 3 次方程式の解であるから

$$a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$$

が成り立つことを示す.

5　三角関数

§13. 加法定理とその応用

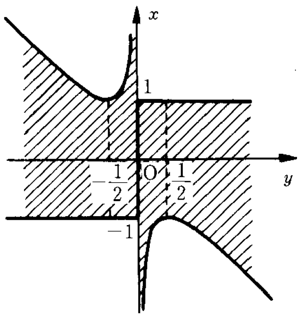
13.1　S の最大値 $\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{OP} = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 中心 O を座標の原点とし，P が x 軸上を動くものと考えてよい．(i) $\mathrm{A}(x,\, y)$，$(x \geqq 0, y \geqq 0)$ とすると，$x^2 + y^2 = 1$ のとき $S = xy$ の最大値を求める．相乗平均 $\leqq$ 相加平均であるから $xy \leqq \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{1}{2}$．$x^2 = y^2$ のとき S は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．そのとき $\mathrm{OP} = 2x$　(ii) $\angle\mathrm{POA} = \theta$ とすると，$\triangle\,\mathrm{OAB} = \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$．$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$

6　平面上の図形

§17. 不等式と領域

17.1　$a>0$ のとき $1 \geqq b \geqq -\left(\dfrac{1}{4a}+a\right)$, $a<0$ のとき $-1 \geqq b \geqq -\left(\dfrac{1}{4a}+a\right)$, $a=0$ のとき $-1 \leqq b \leqq 1$



7　個数の処理

§18. 場合の数と二項定理

18.1　(1)　${}_{m+n}\mathrm{C}_m$　(2)　$f(i,j)\times f(m-i,n-j)={}_{i+j}\mathrm{C}_i\times{}_{m+n-i-j}\mathrm{C}_{m-i}$
(3)　42

$\boxed{\text{ヒント}}$ 横の各区画を ○ で, | で表す. (1) 最短路を通って A から B に行く1つ道順は m 個の ○ と n 個の | を並べた順列で表される. その総数は $m+n$ 個のものから m 個を選ぶ組合せの数であり, $f(m,n)={}_{m+n}\mathrm{C}_m$

(3) (i) 樹形図的な方法 : 横の5個の区画の並び方 ○ ○ ○ ○ ○ の間に縦の4個の区画 | | | | を配列する際, | の個数がそれより左側の○の個数より多くならないように, 場合に分けて数える.

○ ○ ○ ○ ○ | …	1		
| …	4		
| ○ …	4		9 ①
| ○ …	3	5 ②	
| ○ …	2		
| ○ …	9	①に等しい	14 ③
| ○ …	5	②に等しい	
| ○ …	14	③に等しい	
合　計	42		

各行の $|$ より前は前行に同じ．$\cdots$ は残りの ○ と $|$ の並び．

(ii) 漸化式による方法：この行き方による A から $\mathrm{M}(i, j)$ までの道順の数を $g(i,\,j)$ とすると，$0 < j < i$ のとき

$$g(i,\,j) = g(i-1,\,j) + g(i,\,j-1),\ g(i,\,i) = g(i,\,i-1)$$

が成り立つ．$g(i,\,0) = 1,\ g(i,\,1) = i$ に注意して $g(5,\,4)$ を求める

(iii) 対称性による方法：順路は点 P=M(3,2), Q=M(4,1), R=M(5,0) に関して対称であり，そのうちの 1 点を経由するとき他の点を通らない．したがって

$$g(5,4) = \{g(3,2)\}^2 + \{g(4,1)\}^2 + \{g(5,0)\}^2.$$

同じように考えると，P までの道順の数は

$$g(3,2) = \{g(2,1)\}^2 + \{g(3,0)\}^1 = 2^2 + 1^2 = 5.$$

ゆえに

$$g(5,4) = 5^2 + 4^2 + 1^2 = 42$$

問題集　2

1　数　列

§1. 数列とその和

1.1　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ $2\sin\dfrac{\theta}{2}\Big(\dfrac{1}{2}+\cos\theta+\cdots+\cos m\theta\Big)=\sin\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)\theta$ を数学的帰納法で証明する.

1.2　(1) $g_n(x)=2^nx+4(2^n-1)$, 定点 $(-4,-4)$

(2) $n=1$ のとき 9 個, $n \geqq 2$ のとき $5\cdot 2^{n+1}-12$ 個

(3) $n=1$ のとき $(-2,0)$, $n=2$ のとき $(-3,0)$, $n \geqq 3$ のとき $(0,2^{n+2}-4)$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $g_n(x)$ は 1 次式であるから, $g_n(x)=a_nx+b_n$ とおいて a_n, b_n の漸化式を作る. 定点を求めるためには $g_n(x)=2^n(x+4)-4$ とする.

(2) $n \geqq 2$ のとき $g_n(0)$, $g_n(-1)$, $g_n(-2), g_n(-3)$ の値を調べる.

1.3　(1) F_n の左端に置くタイルの種類 T_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ によって場合に分ける. T_k のときの敷き詰め方は f_{n-k} 通りである.

(2) $f_n=2^{n-1}$

(3) F_{n-1} のおのおのの敷き詰め方で左端に置いたタイル T_k $(k\neq 1)$ を T_{k+1} で置き換えると F_n が敷き詰められる. また, F_{n-2} のおのおのの敷き詰め方について左端のタイルの左に T_2 をつけ加えて置くと F_n が敷き詰められる.

(4) $g_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}-\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}\Big\}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (4) 問題集 **2, 1.34** において $a+b=-1$, $ab=-1$ の場合である. a, b は 2 次方程式 $t^2-t-1=0$ の解.

1.4　(1) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\Big(\frac{1}{n}\Big)^r$　　(2) 第 1 の不等式 ： $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\cdot 1\cdot\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot 1\cdot\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)<\text{第 2 辺},$$

第 2 の不等式　： $k!>2^{k-1}$ $(k\geqq 3)$ したがって $\dfrac{1}{k!}<\dfrac{1}{2^{k-1}}$ であるから, 第 2 辺 $\displaystyle <1+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$

(3) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\Big(\frac{1}{n}\Big)^r$ と $\displaystyle\sum_{r=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_r\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^r$ の各項を順に比較する．前者の各項より後者の各項が大きく，後者の最後の項が余る．

(4) 証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) の不等式を用いて $\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < 1$ を示す．

§2. 無限数列

2.1 (1) $a_2 = a_3 = 0,\ b_2 = 5,\ b_3 = \dfrac{5}{2}$ (2) 4

(3) $5\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}$ (4) 証明略 (5) $\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (3) $b_n - a_n = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}(b_1 - a_1)$ (4) 数学的帰納法による．

2.2 (1) $a_{n+1} \leqq ra_n$ から $a_{n+1} \leqq r^{n-1}a_1$．$0 < r < 1$ であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ は収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ とおくと $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n^n}{(n+n)^n} = \dfrac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n}$．

$\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n \geqq 1 + \dfrac{n}{n} = 2$ であるから $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \dfrac{1}{2}$． (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ は収束する．

2 微 分 法

§4. 関数の増減

4.1 (1) $a < 0$ のとき $m = a-1,\ M = 0$．$0 \leqq a \leqq 1$ のとき $m = a-1,\ M = 2\Big(\dfrac{a}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}$．$1 \leqq a \leqq 3$ のとき $m = 0,\ M = 2\Big(\dfrac{a}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}$． $3 < a$ のとき $m = 0,\ M = a-1$

(2) $m = 0$. $a < 0$ のとき $M = 1 - a$. $0 \leqq a \leqq \dfrac{3}{4}$ とき $M = 1 - a$． $\dfrac{3}{4} < a \leqq 3$ のとき $M = 2\Big(\dfrac{a}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}$． $3 \leqq a$ のとき $M = a - 1$

§7. 導関数の応用

7.1 (1) $\cos x = -\dfrac{1}{p}$ のとき最小値 $p^2 - 1$

(2) 最大値 $\dfrac{\sqrt{p^2-1}-1}{p^2-2}$, 最小値 $-\dfrac{\sqrt{p^2-1}+1}{p^2-2}$

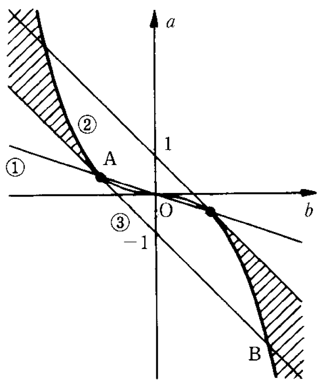
$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $\cos x = t$ とおくとき $\{f(x)\}^2 = \dfrac{(p+t)^2}{1-t^2}\ (-1 < t < 1)$ (2) $\sin x \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{g(x)} = f(x) + 1$.

7.2 (1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{k}{a_n}\Big)$ (2) $\sqrt{k}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots \geqq \sqrt{k}$ を証明する.

7.3 (1) $f(x)$ が奇関数であるから曲線 $y = f(x)$ は原点に関して対称. $f'(x) = 3ax^2 + b$ であり, $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{3a}}$. $a > 0$ のとき $b < 0$ であり, $x = \sqrt{-\dfrac{b}{3a}}$ のとき極小値 $y = \dfrac{2b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3a}}$ をとる. 正方形を 4 つの部分に分けるためには $0 < \sqrt{-\dfrac{b}{3a}} < 1$ $\therefore$ $-\dfrac{b}{3} < a$ ① であって, 極小値が $\dfrac{2b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3a}} \leqq -1$ $\therefore$ $a \leqq -\dfrac{4}{27}b^3$ ② また, $x = 1$ における $f(x)$ の値が $f(1) = a + b > -1$ $\therefore$ $a > -b - 1$ ③

(2) ba 平面で点 (b, a) の存在範囲は, $a > 0$ のときは不等式 ①, ②, ③ が表す領域である. 3 次曲線 $a = -\dfrac{4}{27}b^3$ と直線 $a = -b - 1$ は $\mathrm{A}\Big(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\Big)$ で接し, $\mathrm{B}(3,\ -4)$ で交わっている. 直線 $a = -\dfrac{b}{3}$ はその接点 A を通る. 領域は第 2 象限で 3 次曲線の下方と直線 $a = -b - 1$ の上方の領域で境界は 3 次曲線を含み直線を含まない. $a < 0$ のときは原点に関して以上の領域と対称な領域である.



3　積 分 法

§8. 不定積分

8.1　(1) $I_n=\dfrac{1}{2}\{x^2(\log x)^n-nI_{n-1}\}$　(2) $I_n=\dfrac{1}{2n-1}\left\{\dfrac{\sin x}{\cos^{2n-1}x}+(2n-2)I_{n-2}\right\}$

§9. 定積分

9.1　(1) $|\alpha|\geqq 1$ のとき $\alpha^2-\dfrac{1}{3}$, $|\alpha|<1$ のとき $\dfrac{4}{3}|\alpha^3|-\alpha^2+\dfrac{1}{3}$　(2) $\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) $|\alpha|\geqq 1$ のとき $f(\alpha)=\alpha^2-\dfrac{1}{3}\geqq\dfrac{2}{3}$ であり, $\dfrac{1}{4}$ になることはない. $|\alpha|<1$ のとき $f(\alpha)=\dfrac{4}{3}|\alpha|^3-|\alpha|^2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$ を解く. $(2|\alpha|-1)^2(4|\alpha|+1)=0$, $4|\alpha|+1\neq 0$ から $|\alpha|=\dfrac{1}{2}$

4　ベクトルと図形

§11. ベクトル

11.1　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{pq\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{p(q+1)}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{-pq\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{q+1}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=p\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(3) 6

§13. 空間のベクトルと図形

13.1　(1) $\boldsymbol{e}_1=\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt2},\ \dfrac{1}{\sqrt2}\right)$, $\boldsymbol{e}_2=\left(\dfrac{2}{\sqrt6},\ \dfrac{1}{\sqrt6},\ \dfrac{1}{\sqrt6}\right)$, $\boldsymbol{e}_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt3},\ \dfrac{1}{\sqrt3},\ -\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$　(2) $\boldsymbol{e}_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt2}\right)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt2},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt2}\right)$

[$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は逆向きであってもよい]

13.2　(1) $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ とする. $\boldsymbol{v}=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の第1成分 $=a_2v_3-a_3v_2=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)=(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})c_1$, 同様に第2成分 $=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_2$, 第3成分 $=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_3$. これらをまとめて式が導かれる.

(2) 左辺 $=(a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)=(a_2c_2+a_3c_3)b_1d_1+(a_1c_1+a_3c_3)b_2d_2+(a_1c_1+a_2c_2)b_3d_3-(a_2d_2+a_3d_3)b_1c_1+(a_1d_1+a_3d_3)b_2c_2+(a_1d_1+a_2d_2)b_3d_3=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$

13.3　$x-y+z=3$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 平面 π の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}=(a,\,b,\,c)$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{l}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$ の π 上への正射影をそれぞれ $\boldsymbol{l}'$, $\boldsymbol{m}'$ とすると, $\boldsymbol{l}'=\boldsymbol{l}-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$

$= (1,0,0) - a(a,\,b,\,c) = (1-a^2, -ab, -ac)$, $\boldsymbol{m'} = \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = (1,1,-1) - (a+b-c)(a,\,b,\,c) = (1-(a+b-c)a,\,1-(a+b-c)b,\,-1-(a+b-c)c)$. $\boldsymbol{m'} \,/\!/\, \boldsymbol{l'}$ であるから $\boldsymbol{m'} = t\boldsymbol{l'}$ とおくと，$a,\,b,\,c$ について t を含んだ連立方程式が導かれ，解は $a = (1-t)b, c = -b$. b は比例因数で $b = 1$ としてよい．平面 π の方程式は $(1-t)(x-1)+(y+1)-(z-1) = 0$. 原点からの距離は $h = \dfrac{|t+1|}{\sqrt{t^2-2t+3}}$ で与えられる． h^2 の最大値を求めるとよい．これは $t = 2$ のとき最大値をとる．

13.4 (1) $\sqrt{3}x + z = 3$ (2) $2\sqrt{3}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 球の中心を C(0, 0, 1) とし，接点を B$(x_0,\,y_0,\,z_0)$ とする．Bにおける接平面はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (x_0,\,y_0,\,z_0-1)$ に垂直であり，方程式は $x_0x+y_0y+(z_0-1)(z-1) = 1$ である．点 A(0, 0, 3) を通るから，$2(z_0-1) = 1$ すなわち $z_0 = \dfrac{3}{2}$ である．接平面の方程式は $x_0x + y_0y + \dfrac{1}{2}z = \dfrac{3}{2}$ ①. したがって点 B は平面 $z = \dfrac{3}{2}$ による球の切り口の円 ${x_0}^2 + {y_0}^2 = \dfrac{3}{4}$ ② 上にある． (1) 接平面が y 軸に平行な場合，接平面の法線が y 軸に垂直であるから $y_0 = 0$. そのとき，$x_0 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，接平面の方程式は $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}z = \dfrac{3}{2}$ (2) 方程式 ② で $y = z = 0$ とおいて $\mathrm{P}\Big(\dfrac{3}{2x_0},\,0,\,0\Big)$，同様に $\mathrm{Q}\Big(0,\,\dfrac{3}{2y_0},\,0\Big)$. $\mathrm{PQ}^2 = \dfrac{9}{4}\Big(\dfrac{1}{{x_0}^2} + \dfrac{1}{{y_0}^2}\Big)$. $x_0,\,y_0$ が ② を満たしながら変化するとき，この最小値を求める．

13.5 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5,1,7)$ であるから $\alpha : 5x + (y-1) + 7(z-2) = 0$ すなわち $5x + y + 7z = 10$ ①. 交点 Q の座標は (3, 0, 0). (1) A は yz 平面上にあり，Q は x 軸上にあるから OA $\perp$ OQ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ を示してもよい．

(2) T の座標を $(x,\,y,\,z)$ とする．OA を軸として回転し，OA $\perp$ OQ であるから OA $\perp$ OT, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}} = y + 2z = 0$ ②. OT=OQ であるから $x^2+y^2+z^2 = 9$ ③. T が 平面 α 上にあるから式 ① が成り立つ．この 3 式を解いて $(x,\,y,\,z) = (2,\,-2,\,1)$

13.6 (1) $\sqrt{\dfrac{2}{3}(k^2-3)}$ (2) K を中心とする半径 $\sqrt{\dfrac{2}{3}(k^2-3)}$ の円 (3) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $\mathrm{KP}^2 = \Big(x-\dfrac{k}{3}\Big)^2 + \Big(y-\dfrac{k}{3}\Big)^2 + \Big(z-\dfrac{k}{3}\Big)^2 = (x+y+z)^2 - 2(yz+zx+xy) - \dfrac{2k}{3}(x+y+z) + \dfrac{k^2}{3} = \dfrac{2}{3}k^2 - 2$ (3) 体積は $\pi\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \dfrac{2}{3}(k^2-3)dk$

5　行列と行列式

§14. 行　列

14.1　$|t| < 1$ のとき $\dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$

14.2　証明略　$\boxed{\text{ヒント}}$ 数学的帰納法による．

§15. 1 次変換

15.1　$a = -4$ または -1,　$b = 0$

15.2　各ベクトルの f による像を $'$ を付けて表すことにする．$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{a}' \perp \boldsymbol{b}'$ すなわち $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}' = 0$ である．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ について $\boldsymbol{e}_1{}' \cdot \boldsymbol{e}_2{}' = 0$ である．$(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = |\ \boldsymbol{e}_1\ |^2 - |\ \boldsymbol{e}_2\ |^2 = 1 - 1 = 0$ であるから，$(\boldsymbol{e}_1{}' + \boldsymbol{e}_2{}') \cdot (\boldsymbol{e}_1{}' - \boldsymbol{e}_2{}') = 0$ であり，$|\ \boldsymbol{e}_1{}'\ |^2 - |\ \boldsymbol{e}_2{}'\ |^2 = 0$ したがって $|\ \boldsymbol{e}_1{}'\ | = |\ \boldsymbol{e}_2{}'\ | = k$ $(k > 0)$ である．任意のベクトル $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$ について，$|\boldsymbol{u}'|^2 = |u_1\boldsymbol{e}_1{}' + u_2\boldsymbol{e}_2{}'|^2 = u_1{}^2|\boldsymbol{e}_1{}'|^2 + u_2{}^2|\boldsymbol{e}_2{}'|^2 = k^2(u_1{}^2 + u_2{}^2) = k^2|\boldsymbol{u}|^2$ ゆえに $|\boldsymbol{u}'| = k|\boldsymbol{u}|$, 同様に他のベクトル $\boldsymbol{v}$ についても $|\boldsymbol{v}'| = k|\boldsymbol{v}|$. 内積についても $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}' = k^2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. $\dfrac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{u}'||\boldsymbol{v}'|} = \dfrac{k^2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{k^2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \dfrac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ であり，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の作る角と $\boldsymbol{u}'$と $\boldsymbol{v}'$ の作る角は等しい

§16. 行列式

16.1　0

16.2　$g(x, y, z) = xyzf(x, y, z)$,　$h(x, y, z) = (x + y + z)f(x, y, z)$

16.3　(1)　解の例　$x_1 = k,\ x_2 = 1 - 2k,\ x_3 = 3k - 1,\ x_4 = 2 - k$　(k は任意の定数)

(2)　$m = 0$ のとき $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, $m = -3$ のとき解なし．

その他のとき $x_1 = -\dfrac{m}{m+3}$, $x_2 = x_3 = -\dfrac{3}{m+3}$

§17. 行列の固有値と対角化

17.1　$|a - b| < 1,\ |a + 2b| < 1$ のとき零行列 O. $|a - b| < 1,\ a + 2b = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $a - b = 1,\ |a + 2b| < 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $a - b = 1,\ a + 2b = 1$ すなわち $a = 1,\ b = 0$ のとき単位行列 E. その他のとき発散

17.2 (1) 4, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 1 (2 重解), $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

(2) $P=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \exp(P^{-1}(tA)P)=\begin{pmatrix}e^{4t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix},$$

$$\exp(tA)=P\begin{pmatrix}e^{4t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{e^{4t}}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\frac{e^t}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

17.3 (1) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ (2) $2u^2+(1+\sqrt{2})v^2+(1-\sqrt{2})w^2$

17.4 (1) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-3\\0&-3&1\end{pmatrix}$

(2) 固有値 2, 4, -2, 単位固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $g=2x'^2+4y'^2-2z'^2$

17.5 (1) 証明略

(2) 直交行列 P が存在して $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}{}^tP$ と表される.

$P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}$ として $p_{11}=a$, $p_{21}=b$, $p_{31}=c$ とおけばよい.

17.6 (1) 2, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 1, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; -1, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) X の各列を 3 次元ベクトルと考えて $X = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2 \ \ \boldsymbol{x}_3)$ とするとき，M_3 は $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$ を成分とする 9 次元ベクトル空間である．$(\boldsymbol{x}_1' \ \ \boldsymbol{x}_2' \ \ \boldsymbol{x}_3') = A(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2 \ \ \boldsymbol{x}_3)$ $= (A\boldsymbol{x}_1 \ \ A\boldsymbol{x}_2 \ \ A\boldsymbol{x}_3)$ とするとき，$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \boldsymbol{x}_2' \\ \boldsymbol{x}_3' \end{pmatrix} = \varphi_A(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & A & O \\ O & O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$ であり，φ_A は 9 次の正方行列 $\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & A & O \\ O & O & A \end{pmatrix}$ で表される M_3 の 1 次変換である．

$\varphi_{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & O & O \\ O & P^{-1}AP & O \\ O & O & P^{-1}AP \end{pmatrix}$ であるから，固有値は 2, 1, -1, 2, 1, -1, 2, 1, -1 であり，固有ベクトルは (1) のベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$

である．$\boldsymbol{0}$ は 3 次元零ベクトル．

§18. 1 次従属・1 次独立と行列の階数

18.1 (1) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ b \neq c$ (2) $a = \pm\dfrac{1}{2},\ b = -c = \pm\dfrac{1}{2}$

18.2 (1) $k = -7$, たとえば $\boldsymbol{a}_3 = -\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{7}{6}\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b} = -\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{11}{6}\boldsymbol{a}_2$

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属であるから

18.3 (1) $\operatorname{rank} A = 2$ (2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の張る部分空間

(3)　$\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ (k は任意).　$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = 0$. Ker $A \perp \boldsymbol{b}$

(4)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4-t\\4\\t\end{pmatrix}$ (t は任意)

18.4　f は行列 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & -1\\1 & 1 & 3 & -3\end{pmatrix}$ で表される．$A = (\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4)$ とする．行の基本操作により $A \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.　$a_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4 = -\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ と表され，Im(f) は 2 次元であり，基底は $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$．$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2$ で表される．Ker(f) は 2 次元であり，基底は $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2\}$

18.5　(1)　$a = 1$ のとき階数 3, $a \neq 1$ のとき階数 4　　(2)　$a \geqq 1$

(3)　$a = 1$ のとき 2 次元，基底 $\{{}^t(1, 1, 1, 0, 0),\ {}^t(0, 0, 0, 1, 1)\}$

$a \neq 1$ のとき 1 次元部分空間，基底 $\{{}^t(0, 0, 0, 1, 1)\}$

18.6　解の例

(1)　$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$　　(2)　$\boldsymbol{y}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1)　$x_1 + x_2 + x_3 = 0$，$x_2 + x_3 + x_4 = 0$ を解くと $x_1 = x_4$，$x_2 = -x_3 - x_4$. $x_3 = 1$，$x_4 = 0$ として $\boldsymbol{w}_1$，$x_3 = 0$，$x_4 = 1$ として $\boldsymbol{w}_2$ が得られ，任意の $\boldsymbol{y} \in W$ は $\boldsymbol{y} = x_3\boldsymbol{w}_1 + x_4\boldsymbol{w}_2$ と表される　(2)　$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}_1 = y_2 - y_3$，$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}_2 = y_1 - y_2 + y_4$ を解く．$y_4 = 0$ として $y_1 = y_2 = y_3$．標準化 $|\boldsymbol{y}| = 1$ として $\boldsymbol{y}_1$ が得られる．さらに

$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(y_1 + y_2 + y_3) = 0$ を付け加えて解くと $y_1 = -2y_3$, $y_2 = y_3$, $y_4 = 3y_3$, これを標準化して $\boldsymbol{y}_2$

18.7 (1) 任意の $f,\ g \in V$, 任意の定数 k に対して，定積分の線形性により $T(f+g) = Tf + Tg$, $T(kf) = kTf$ となる．

(2) $T = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} & 0 \\ \dfrac{2}{5} & 0 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) $(t-x)^2$, $(t-x)^2 t$, $(t-x^2)t^2$ を t について区間 $[-1,\ 1]$ で積分する．

問題集　3

1　微 分 法

§1. いろいろな関数の導関数

1.1　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) 放物線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ と焦点 F の x 座標の差は $x-p$ である．

(2) 点 P は焦点 F と準線 $x=-p$ からの距離が等しいから $x+p=r$．$2p+r\cos\theta=r$

(3) 点 Q の偏角は $\theta+\pi$ であるから FQ$=\dfrac{2p}{1+\cos\theta}$．$\dfrac{1}{\mathrm{FP}}+\dfrac{1}{\mathrm{FQ}}=\dfrac{1}{p}$

1.2　(1) 証明略　　(2) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=4$　　(3) $\dfrac{5}{4}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $x=\sqrt{3}+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入して r について解く．

(2) PQ$=p+q=4p$ に注意

1.3　(1) $f'(x)=x^{p-1}-b,\ f''(x)=(p-1)x^{p-2}$ であるから，$x=b^{\frac{1}{p-1}}$ で極小値をとる．条件により $f(b^{\frac{1}{p-1}})=\dfrac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}-b^{\frac{p}{p-1}}+\dfrac{1}{q}b^q=0$ となるから，$x\geqq 0$ でつねに $f(x)\geqq 0$.　　(2) (1) の不等式で $x=\dfrac{a_k}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, $b=\dfrac{b_k}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ とすると

$$\frac{a_kb_k}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqq\frac{1}{p}\frac{a_k{}^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i{}^p}+\frac{1}{q}\frac{b_k{}^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i{}^q}$$

$k=1,\cdots,n$ として和を作ると右辺の和 $=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ となり，(2) の不等式が導かれる．

§3. テイラーの定理

3.1　数学的帰納法による．$n=1$ のとき $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$.　n のとき成り立つとすれば，$n+1$ に対して

$$\begin{aligned}(x^n\log x)^{(n+1)}&=\{(x\cdot x^{n-1}\log x)'\}^{(n)}\\&=\{(x^{n-1}\log x)'\}^{(n)}+\left\{x\cdot(n-1)x^{n-2}\log x+x\cdot x^{n-1}\frac{1}{x}\right\}^{(n)}\\&=\frac{(n-1)!}{x}+(n-1)\{x^{n-1}\log x\}^{(n)}+(x^{n-1})^{(n)}\\&=\frac{(n-1)!}{x}+(n-1)\frac{(n-1)!}{x}=\frac{n!}{x}\end{aligned}$$

3.2 (1) 証明略 (2) $(1+x^2)y^{(n+2)}+2(n+1)y^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=0$

(3) $y^{(2n)}(0)=0,\ \ y^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$

(4) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdots$

3.3 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''=\dfrac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ (2) 証明略

(3) $y'(0)=1,\ y^{(2n)}(0)=0,\ y^{(2n+1)}(0)=\{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1\}^2\ \ (n\geqq 1)$

3.4 (1), (2) 証明略

(3) $y^{(2n)}(0)=0,\ y^{(2n+1)}(0)=(-1)^n4^n(n!)^2,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3.5 (1) k が偶数 $2p$ のとき $(-1)^{n-p}{}_n\mathrm{C}_p x^{2p}$, k が奇数のとき 0

(2) n が偶数 $2p$ のとき $(-1)^p\dfrac{n!}{(p!)^2 2^n}$, k が奇数のとき 0 (3) $-\dfrac{n+1}{n+2}$

3.6 (1) 証明略 (2) $\dfrac{d}{dx}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]=2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)=2f(x)g(x)$ $-2g(x)f(x)=0$ したがって $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ は定数. $f(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ だから $f(0)=1,\ g(0)=0.\ \ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$

2 積 分 法

§4. いろいろな不定積分

4.1 (1) $2\log|x+x^2+x+1|-\dfrac{3}{2}\log|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}|+\sqrt{x^2+x+1}-x$

(2) $\dfrac{e^x}{x^2+1}$ (3) $\log\dfrac{\sqrt{e^t+1}-1}{\sqrt{e^t+1}+1}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) 与式 $=e^x\left\{\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}$ として部分積分法する.

(3) $\sqrt{e^t+1}=t$ とおく.

§5. 定積分とその応用

5.1 $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 円と双曲線の交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とすると $\alpha^2=2-\sqrt{3},\ \beta^2=2+\sqrt{3}$. $\alpha\beta,\ \alpha+\beta,\ \beta-\alpha$ を求めて, 回転体の式に代入する.

5.2 (1) $k<x<k+1$ のとき $\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$. 各辺を $[k,\ k+1]$ で積分す

ると $\dfrac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \dfrac{1}{k}$ ①. $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ まで加えれば $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} < \log n$. $k=n$ まで加えれば $\log(n+1) < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ ②

(2) 1　(3) ① で $k=n$ として $\dfrac{1}{n+1} - \log(n+1) < -\log n$. 両辺に $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を加えると $a_{n+1} < a_n$. ② から $a_n > \log(n+1) - \log n > 0$. $\{a_n\}$ は有界な減少数列であり収束する.

5.3　$n=0$ のとき $\dfrac{1}{24\sqrt{3}}(3\sqrt{3}-2)\pi$,　$n=1$ のとき $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{3}{2}$,

$n=2$ のとき $\dfrac{1}{24}(2\sqrt{3}-3)\pi$,　$n=3$ のとき $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{32}{27}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\dfrac{x^n}{x^4+4x^2+3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^n}{x^2+1} - \dfrac{x^n}{x^2+3}\right)$ ①. $n=2$ のとき ① $= 1 - \dfrac{1}{x^2+1} - 1 + \dfrac{3}{x^2+3} = \dfrac{3}{x^2+3} - \dfrac{1}{x^2+1}$. $n=3$ のとき ① $= \dfrac{3x}{x^2+3} - \dfrac{x}{x^2+1}$

5.4　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ $1, x, x^2, x^3$ について証明する. 一般の 3 次式に対しては積分の線形性による.

5.5　(1) $S_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}S_{n-1}$

(2) $S_n = \dfrac{(2n)!}{(4n^2+1)\{4(n-1)^2+1\}\cdot\cdots\cdot 5}\left(1-\dfrac{1}{e^\pi}\right)$

$\boxed{\text{ヒント}}$ x は減少で $1 \geqq x \geqq 1-\dfrac{1}{e^\pi}$, y は $0 \leqq y \leqq 1$ で $t=0,\ \pi$ のとき最小値 0 をとる. $S_n = \displaystyle\int_0^\pi y\frac{dx}{dt} = \int_0^\pi \sin^{2n} t\, e^{-t}\,dt$. 2 回部分積分して $S_n = 2n(2n-1)S_{n-1} - 4n^2 S_n$

5.6　(1) $I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n-3} + \cdots + \dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{\pi}{4} & (n\ :\ \text{奇数}) \\ \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n-3} + \cdots - \dfrac{1}{3} + 1 - \dfrac{\pi}{4} & (n\ :\ \text{偶数}) \end{cases}$

(2) $I_n = \dfrac{3n-2}{3n-3}\cdot\dfrac{3n-5}{3n-6}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $\dfrac{x^{2n}}{1+x^2} = \dfrac{x^{2(n-1)}(1+x^2-1)}{1+x^2} = x^{2(n-1)} - \dfrac{x^{2(n-1)}}{1+x^2}$

(2) $\dfrac{1}{(x^3+1)^n} = \dfrac{x^3+1-x^3}{(x^3+1)^n} = \dfrac{1}{(x^3+1)^{n-1}} - x\dfrac{x^2}{(x^3+1)^n}$ $(n \geqq 2)$

5.7 (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) 0 (3) $\dfrac{(-1)^n 2}{2n+1}$ (4) $\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2),(3) 三角関数の和差を積になおす公式を用いる．

5.8 (1) 証明略 (2) $x=\sin^2\theta$ とおけば，$dx=2\sin\theta\cos\theta$，$1-x=\cos^2\theta$．α を任意定数として $x=\alpha t$ とおけば，$dx=\alpha dt$ であるから $\Gamma(s)$ は

$$\Gamma(s)=\alpha^s\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^{s-1}\,dt \quad ①$$

で与えられる．さらに $\alpha=1+x$，$s=p+q$ と置き換えて

$$\Gamma(p+q)=(1+x)^{p+q}\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}\,dt$$

$B(p,\ q)$ で $x=\dfrac{t}{1+t}$ とおけば，$dx=\dfrac{dt}{(1+t)^2}, 1-x=\dfrac{1}{1+t}$ であるから

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

と表される．この式の t を x で置き換え，積分の順序を入れ換え，①を用いて

$$\Gamma(p+q)B(p+q)=\int_0^\infty\frac{\Gamma(p+q)x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=\int_0^\infty\Big\{\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}\,dt\Big\}x^{p-1}dx$$

$$=\int_0^\infty\Big\{t^p\int_0^\infty e^{-xt}x^{p-1}\,dx\Big\}t^{q-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty\Gamma(p)t^{q-1}e^{-t}dt=\Gamma(p)\Gamma(q)$$

5.9 (1) 図略 (2) $s<-1$ のとき 0，$-1\leqq s\leqq 0$ のとき $e^{-s}(e-e^{-s})$，$0<s$ のとき $e^{-s}(e-1)$ (3) $s=0$ のとき最大値 $e-1$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (2) $s<-1$，$0\leqq t\leqq 1$ のとき $f(t+s)=0$．$-1\leqq s\leqq 0$，$-s\leqq t\leqq 1$ のとき $f(t+s)=e^{-(t+s)}$. $0\leqq s$，$0\leqq t$ のとき $f(t+s)=e^{-(t+s)}$

5.10 (1) $f_1'(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt=f_0(x)$，$f_2''(x)=2\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=2f_1(x)$ (2) $f_n(x)=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}(-1)^r\int_0^x t^r f(t)dt$ として微分する．$f_n{}'(x)=\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_r(n-r)x^{n-r-1}(-1)^r\times\int_0^x t^r f(t)dt+\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}(-1)^r x^r f(x)$．$(n-r)_n\mathrm{C}_r=n_{n-1}\mathrm{C}_r,\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r(-1)^r=0$ であるから，$f_n{}'(x)=n\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r x^{n-r-1}(-1)^r\int_0^x t^r f(t)dt+x^n f(x)\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r(-1)^r x^r f(x)$ $=n\displaystyle\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt=nf_{n-1}(x)$

(3) $f_n{}^{(n)}(x)=n!f_0(x)$

5.11 (1) $S=\pi a\sqrt{a^2+h^2}+\pi a^2$，$V=\dfrac{1}{3}\pi a^2 h$，$r_G=0$，$z_G=\dfrac{3}{4}h$ (2) $h=2\sqrt{2}a$

(3) $h = \dfrac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) 円錐の頂点を z 軸の原点，重心の方向を正方向にとる．円錐は直線 $y = f(z) = \dfrac{a}{h}z$ $(0 \leqq z \leqq h)$ を z 軸のまわりに回転した図形と考える．そのとき $S = 2\pi \displaystyle\int_0^h f(z)\sqrt{1+\{f'(z)\}^2}\,dz$, $V = \pi \displaystyle\int_0^h \{f(z)\}^2 dz$．これらの値は初等的にも得られる．回転体は軸に関して対称だから $r_G = 0$, $z_G = \dfrac{1}{V}\pi \displaystyle\int_0^h z\{f(z)\}^2 dz$

3　偏微分と重積分

§6. 偏導関数

6.1　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\dfrac{\partial|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{\partial x} = \dfrac{x-a_1}{|\mathrm{AP}|}$, $\dfrac{\partial|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{\partial y} = \dfrac{y-a_2}{|\mathrm{AP}|}$

6.2　(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'(r)\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'(r)\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(r)\dfrac{x^2}{r^2} + f'(r)\Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{x^2}{r^3}\Big)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''(r)\dfrac{xy}{r^2} - f'(r)\dfrac{xy}{r^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(r)\dfrac{y^2}{r^2} + f'(r)\Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{y^2}{r^3}\Big)$　(2) $f''(r) + \dfrac{f'(r)}{r}$

6.3　証明略

$\boxed{\text{ヒント}}$ たとえば $\dfrac{\partial z}{\partial t} = -cf'(x-ct)g(x+ct) + cf(x-ct)g'(x+ct)$

6.4　(1) $1 - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) - \dfrac{1}{8}(x^2+y^2)^2 - \cdots + (-1)\dbinom{\frac{1}{2}}{n}(x^2+y^2)^n + \cdots$

(2) $1 + ax + \dfrac{1}{2!}(a^2-b^2)x^2 + \dfrac{1}{3!}(a^3-3ab^2)x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_n\mathrm{C}_{2r} a^{n-2r} b^{2r} x^n + \cdots$

§7. 偏導関数の応用

7.1　(1) $k = \dfrac{a^2b^2}{b^2X^2 + a^2Y^2}$ とおくとき $x_1x_2 = ka^2\Big(1 - \dfrac{Y^2}{b^2}\Big)$, $y_1y_2 = kb^2\Big(1 - \dfrac{X^2}{a^2}\Big)$

(2) 円 $X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $\dfrac{x_iX}{a^2} + \dfrac{y_iY}{b^2} = 1$ ①, $\dfrac{{x_i}^2}{a^2} + \dfrac{{y_i}^2}{b^2} = 1$ ② $(i = 1, 2)$ から $x_1 + x_2 = 2kX$, $y_1 + y_2 = 2kY$ とおくことができ，k は上の値をとる．② の $i = 1, 2$ に対する 2 式から x_1x_2, y_1y_2 を解く．(2) 接線の直交条件から $X^2 + Y^2 - a^2 - b^2 = 0$ を導く．

7.2　焦点 $\mathrm{F}(p, 0)$ を通る直線を $x = ny + p$ とする．放物線との交点の y 座標は $y^2 = 4p(ny + p)$, $y^2 - 4pny - 4p^2 = 0$ の解であり，2 つの解の積は $y_1y_2 = -4p^2$．交

点 $(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ 2$, における接線の方程式は $y_i y = 2p(x+x_i)$. x と y の係数どうしの積は $4p^2+(-y_1)(-y_2)=4p^2-4p^2=0$ であり，直交する.

7.3 (1) $7x-8y=0$ (2) 点 $(x,\,y)=\left(\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) で最大値 25

7.4 (1) $z_x=\dfrac{1-2xf'}{2zf'-1},\ z_y=\dfrac{1-2yf'}{2zf'-1}$ (2) 証明略

§8. 重　積　分

8.1 $a>0,\ b>0$ として

$$\int_1^a\int_1^b \frac{1}{(x+y)^m} = \frac{1}{(m-1)(m-2)}\left\{\frac{1}{2^{m-2}}-\frac{1}{(a+1)^{m-2}}-\frac{1}{(1+b)^{m-2}}+\frac{1}{(a+b)^{m-2}}\right\}$$

$$\to \frac{1}{(m-1)(m-2)}\quad (a\to\infty,\ b\to\infty)$$

8.2 $\dfrac{25\sqrt{5}-31}{120}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ 領域 D を放物線 $y=x^2$ で 2 つに分割し，下側では x^2 を，上側では y を重積分する．直線 $x+y=1$ と放物線の交点の x 座標を α として計算するとよい.

8.3 $-\dfrac{16}{9}\pi$

8.4 (1) 8π (2) $\dfrac{81}{32}\pi$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) 底円の半径 2，高さ 4 の円柱から曲面 S の下側の部分 $0\leqq z\leqq x^2+y^2$ を除いた体積である.

$$2^2\pi\cdot 4-\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2\leqq 4$$

(2) (1) の立体の平面 $z=x+2$ の下側にある部分の体積に等しい．その平面による曲面 S の切り口の xy 平面上への正射影は円 $x^2+y^2=x+2$. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$. 残った水の体積は

$$V=\iint_D \{x+2-(x^2+y^2)\}dxdy=\iint_D\left\{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2\right\}dxdy,$$

$$D: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{9}{4}$$

点 $\left(\dfrac{1}{2},\,0\right)$ を極とする極座標になおすと

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{9}{4}-r^2\right)r\,drd\theta = 2\pi\left[\frac{9}{8}r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{81}{32}\pi$$

4　微分方程式

§9. 1 階微分方程式

9.1　(1) $y' = \dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{3}x-y}$　　(2) $\dfrac{dr}{d\theta} = \sqrt{3}r$　　(3) $r = e^{\sqrt{3}(\theta-\frac{\pi}{2})}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ P の極座標を (r,θ) とすると $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. 接線の傾きは

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \tan(\theta+30°) = \dfrac{\tan\theta+\tan 30°}{1-\tan\theta\tan 30°} = \dfrac{\sqrt{3}\tan\theta+1}{\sqrt{3}-\tan\theta} = \dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{3}x-y}$ ①

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(r\sin\theta)}{d(r\cos\theta)} = \dfrac{\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta} = \dfrac{\tan\theta\cdot r' + r}{r' - r\tan\theta}$ $\Big(r' = \dfrac{dr}{d\theta}\Big)$ ②

①=② とおいて解くと $r' = \sqrt{3}r$.

(3) 一般解は $r = C^{\sqrt{3}\theta}$. 点 (0,1) の極座標は $\Big(1, \dfrac{\pi}{2}\Big)$. 条件のもとに $C = e^{-\sqrt{3}\frac{\pi}{2}}$

§10. 2 階微分方程式

10.1　(4) $y = \dfrac{1}{2}(a+b-1)e^x + \dfrac{1}{2}\Big(a-b+\dfrac{1}{3}\Big)e^{-x} + \dfrac{1}{3}e^{2x}$

10.2　(1) $z = A\sin\sqrt{m}t + B\cos\sqrt{m}t$　(2) $a = \pm 1,\ b = \mp 1$ (複号同順)

(3) $x = \cos t + \cos\sqrt{3}t,\ \ y = \cos t - \cos\sqrt{3}t$

10.3　(1) $f(x)$　(2) $f(x) = -\sin x$

$\boxed{\text{ヒント}}$ ラプラス変換の問題であるが，次のように解くこともできる.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = \dfrac{d}{dx}\Big\{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\Big\} = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$

(2) 両辺を微分すると $-f'(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, $\ -f'' = f(x)$. この一般解は

$f(x) = A\sin x + B\cos x$. $f(x) = 0, f'(0) = -1$ であるから $f(x) = -\sin x$

10.4　(1) 証明略　(2) n が偶数のとき $y^{(n)}(0) = 0$,　n が奇数のとき

$y^{(n)}(0) = \{(n-2)^2 - a^2\}\{(n-4)^2 - a^2\}\cdots\{1-a^2\}a$

$\boxed{\text{ヒント}}$ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ とおき，項別微分して (1) の微分方程式に代入し，係数を比較すると $a_0 = 0$, $a_1 = a$, $n(n-1)a_n = \{(n-2)^2 - a^2\}a_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ が導かれる. $y^{(n)}(0) = n!a_n$

10.5　(1) テイラーの定理により $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dfrac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h^2$, $f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \dfrac{1}{2}f''(x-\theta_2 h)h^2$ $(0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1)$ が成り立つ. (1) の式 $= \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\{f''(x+\theta_1 h) + f''(x-\theta_2 h)\} = f''(x)$. 一方条件式を代入すると (1) の式

$= \lim_{h\to 0} 2f(x)\dfrac{\cosh h-1}{h^2} = -f(x)$．したがって微分方程式は $y'' = -y$

(2) $f(x) = A\sin x + B\cos x$

10.6 (1) $u = x+y,\ v = x-y$ とおくと $u+v = 2x,\ u-v = 2y$ であり，式 ① は ② になる．(2) 式 ② を x で偏微分すると $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f''(x)y$ ④，
y で偏微分すると $f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x)$ ⑤． ⑤ を y で偏微分すると式 ③ $f''(x+y) - f''(x-y) = 0$ が導かれる． ④を y で偏微分すると $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)$． ③ を用いると $f''(x+y) = f''(x)$．任意の y について成り立つから，$f''(x)$ が定数であることを示している．$f''(x) = A$ ⑥ とおく．

(3) ⑥ を 2 回積分すると $f'(x) = Ax + B,\ f(x) = \dfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$．初期条件により $A = 1,\ B = -1,\ C = 1$ であるから $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 1$

5 複 素 数

§11. 複素数と複素数平面

11.1 n について数学的帰納法で証明する．$n = 1$ のとき両辺とも $|z_1 - w_1|$ であり，成り立つ． $n = k$ のとき成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}
&|z_1z_2\cdots z_kz_{k+1} - w_1w_2\cdots w_kw_{k+1}|\\
&\quad = |z_1z_2\cdots z_k(z_{k+1} - w_{k+1}) + (z_1z_2\cdots z_k - w_1w_2\cdots w_k)w_{k+1}|\\
&\quad \leqq |z_1z_2\cdots z_k(z_{k+1} - w_{k+1})| + |(z_1z_2\cdots z_k - w_1w_2\cdots w_k)w_{k+1}|\\
&\quad = |z_1z_2\cdots z_k||z_{k+1} - w_{k+1}| + |z_1z_2\cdots z_k - w_1w_2\cdots w_k||w_{k+1}|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad [\,|z_1z_2\cdots z_k| \leqq 1,\ |w_{k+1}| \leqq 1\ \text{であるから}\,]\\
&\quad \leqq |z_{k+1} - w_{k+1}| + |z_1z_2\cdots z_k - w_1w_2\cdots w_k| \qquad [\,\text{数学的帰納法の仮定により}\,]\\
&\quad \leqq |z_{k+1} - w_{k+1}| + \sum_{j=1}^{k}|z_j - w_j| = \sum_{j=1}^{k+1}|z_j - w_j|
\end{aligned}$$

よって $n = k+1$ のときにも成り立つ．したがってすべての自然数 n についてこの不等式が成り立つ．

付録　確　率

§1. 確　率

1.1　$\dfrac{l}{w}\sin\theta,\ \dfrac{2l}{\pi w}$

1.2　(1) $\dfrac{17}{36}$　　(2) $\dfrac{5}{36}$　　(3) $\dfrac{13\sqrt{3}}{72}$

1.3　$A_i =$「A の出力が i」,$B_i =$「B の出力が i」$(i = 0,\,1)$ とする．

$$P(A_0) = a,\ P(A_1) = 1 - a$$

$$P(B_0|A_0) = b,\ P(B_1|A_0) = 1 - b,\ P(B_0|A_1) = 1 - c,\ P(B_1|A_1) = c$$

(1) $P(B_1) = P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1)P(B_1|A_1) = a(1-b) + (1-a)c$

(2) $P(A_1|B_1)$ を求める．乗法定理により

$$P(B_1)P(A_1|B_1) = P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1)$$

であるから，

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{(1-a)c}{a(1-b) + (1-a)c}$$

(3)　$$p_1 = P(B_1) = a(1-b-c) + c$$

n 回目の出力が 1 である確率 p_n は a の代わりに $1 - p_n$ として

$$p_n = (1-p_{n-1})(1-b-c) + c = 1 - b - p_{n-1}(1-b-c)$$

$$p_n - p_{n-1} = -(p_{n-1} - p_{n-1})(1-b-c)$$

$q_n = p_n - p_{n-1}$，$p_0 = 1 - a$，$r = -(1-b-c)$ とおくと

$$\begin{aligned}
q_1 &= p_1 - p_0 = a(1-b-c) + c - 1 + a = c - 1 + a(2-b-c) \\
q_n &= r^{n-1}q_1 = r^{n-1}\{c - 1 - a(2-b-c)\} \\
p_n &= (p_n - p_{n-1}) + (p_{n-1} - p_{n-2}) + \cdots + (p_1 - p_0) + p_0 \\
&= q_n + q_{n-1} + \cdots + q_1 + p_0 \\
&= \frac{1-r^n}{1-r}\{c - 1 + a(2-b-c)\} + 1 - a \\
&= \frac{1 - \{-(1-b-c)\}^n}{2-b-c}\{c - 1 + a(2-b-c)\} + 1 - a
\end{aligned}$$

$a = 0.5$ のとき

$$p_n = \frac{1 - \{-(1-b-c)\}^n}{2-b-c}\{0.5(c-b)\} + 0.5$$

(4) $c = 1,\ 0 \leqq b < 1$ のとき

$$p_n = \frac{1-b^n}{1-b}\{0.5(1-b)\} + 0.5$$
$$= 0.5(1-b^n) + 0.5 \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$c=1,\ b=1$ のとき

$$p_1 = 1-a, \quad p_n = p_{n-1} = 1-a \to 1-a \quad (n \to \infty)$$

§2. 確率分布

2.1 $g_A + c_A + p_A = 1,\ g_B + c_B + p_B = 1$ である.

(1) $E(A) = g_A c_B + c_A p_B + p_A g_B$

(2) $p_A = 0,\ g_B = 0$ とすると

$$g_A = 1 - c_A,\ p_B = 1 - c_B.\ \ E(A) = g_A c_B + c_A p_B + p_A g_B$$

(3) $c_A = c_B = c$ として $E(A) = (1-c)c + c(1-c) = -2(c^2 - c)$.

$c = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $E(A) = \dfrac{1}{2}$

(4) $c_A = c_B = \dfrac{1}{2}$ として $g_A + p_A = \dfrac{1}{2},\ g_B + p_B = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{1}{2}g_A + \frac{1}{2}p_B + p_A g_B \\ &= \frac{1}{2}g_A + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - g_B\Big) + \Big(\frac{1}{2} - g_A\Big)g_B \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}g_A - \frac{1}{2}g_A g_B \\ &= \frac{1}{4} + g_A\Big(\frac{1}{2} - g_B\Big) \end{aligned}$$

$g_A = \dfrac{1}{2},\ g_B = 0$ のとき $E(A) = \dfrac{1}{2}$

その他の場合 $\dfrac{1}{4} \leqq E(A) < \dfrac{1}{2}$. $E(A) + E(B) = 1$ であるから B の方が有利

付録　統　計

§4. 正規分布

4.1
$$L(\theta) = \theta^n {x_1}^{\theta-1} {x_2}^{\theta-1} \cdots {x_n}^{\theta-1} = \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1}$$
$$\log L(\theta) = n \log\theta + (\theta - 1)\log(x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = \frac{n}{\theta} + \log(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

この式を 0 とおいて解くと $\hat\theta = -\dfrac{n}{\log(x_1 x_2 \cdots x_n)}$

4.2 (1) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}=e^x$ あるから，$\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}p_r=\sum_{r=0}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^r}{r!}=e^{-\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\mu^r}{r!}=1$

(2) $\displaystyle E(X) \quad =\sum_{r=0}^{\infty}rp_r=\sum_{r=1}^{\infty}re^{-\mu}\frac{\mu^n}{r!}=e^{-\mu}\mu\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!}=e^{-\mu}\mu e^{\mu}=\mu$

$\displaystyle V(X)=\sum_{r=0}^{\infty}r^2p_r-\mu^2=\sum_{r=0}^{\infty}r(r-1)p_r+\sum_{r=0}^{\infty}rp_r-\mu^2$

$\displaystyle \sum_{r=0}^{\infty}r(r-1)p_r=e^{-\mu}\sum_{r=0}^{\infty}r(r-1)\frac{\mu^r}{r!}=e^{-\mu}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\mu^r}{(r-2)!}=e^{-\mu}\mu^2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\mu^r}{r!}=\mu^2$

$\therefore \quad V(X)=\mu^2+\mu-\mu^2=\mu$