新編 高専の数学問題集 第2版 1・2・3補遺

この補遺は「新編 高専の数学問題集 第2版 1・2・3」に収録しなかった大学編入学試験問題を掲載しています.

章・節の組み方と出題大学名と出題時期の記載の仕方は上記問題集に準じています. 解法およびヒントで, 着想の異なる方法には(i), (ii)など区別して記述しています.

「問題集」とこの補遺に掲載されていない大学編入学試験の, 興味のある問題とその解, またここに掲載されているものと異なる着想の解法があれば, こちらの「高専の数学会議室」に書き込んでいただければ幸いです. 順次本文に繰り込み予定ですが, 採用された解法等は森北出版に帰属することをご了承下さい.

著 者

補遺の内容

問題集　1

3　命題・等式・不等式

§6. 集合と命題

6.1　方程式 $x^4-14x^3+74x^2-182x+169=0$ の 2 つの解の積が他の 2 つの解の積に等しいことを知ってこれを解け．　(都立大)

6.2　$x^3+px^2+qx+r=0$　($p,\ q,\ r$ は整数) の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とし，$a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，$\{a_n\}$ の各項がすべて整数であることを証明せよ．　(京大)

5　三角関数

§13. 加法定理とその応用

13.1　中心 O，半径 1 の円がある．円外の点 P からこの円に 2 本の接線を引き，O と接点 A と B で作られる△OAB の面積を S とする．P が動くときの S の最大値，およびその値を与える点 P と O の距離を求めよ．
(長岡技大*)

6　平面上の図形

§17. 不等式と領域

17.1　円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=ax^2+b$ が共有点をもつような $(a,\,b)$ を座標にもつ点を ab 平面上に図示せよ．　(阪大*)

7　個数の処理

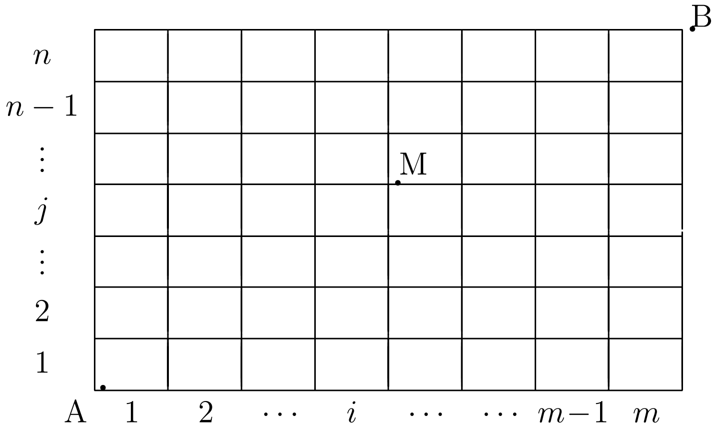
§18. 場合の数と二項定理

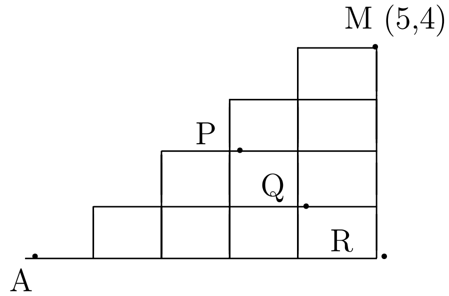
18.1　街路が長方形状に縦方向に $m+1$ 本，横方向に $n+1$ 本ある．左下を点 A(0, 0), 右上を B$(m,\,n)$ とし，点 A から最短路を通って点 B に行くものとする．また，A から点 M$(i,\,j)$ へ行く最短路の数を $f(i,\,j)$ で表すものとする．　(阪大*)

(1)　$f(m,\,n)$ を求めよ．

(2)　点 M(i, j) を通り B へ行く最短路の数を f を用いて表せ.

(3)　$j \leqq i$ であるような点 M(i, j) だけを通って A から M(5, 4) へ行く行き方は何通りあるか.　(阪大*)





(点 P, Q, R は解の説明のためにいれている)

問題集　2

1　数　列

§1. 数列とその和

1.1　次の式を数学的帰納法を用いて証明せよ．　(東北大*)

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos m\theta=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

1.2　自然数 n と関数 $f(x)=2x+4$ に対して，

$$g_1(x)=f(x),\quad g_n(x)=f(g_{n-1}(x))\quad (n \geqq 2)$$

とする．

(1)　$g_n(x)$ を求めよ．また $y=g_n(x)$ は n の値にかかわらずある定点を通る直線を表すことを示し，その点を求めよ．

(2)　$x \leqq 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq g_n(x)$ を満たす整数 $x,\ y$ の組 $(x,\,y)$ の個数を求めよ．

(3)　(2) の整数の組 $(x,\,y)$ のうち，$-5x+y$ の値を最大にするものを求めよ．　(豊橋技大)

1.3　縦 1(m) 横 n(m) の床 F_n がある．この床に縦 1(m) 横 k(m) のタイル T_k を何枚か使って敷き詰めたい．T_k は何枚使ってもよいものとする．タイルの並ぶ順序は区別するものとして，F_n をタイルで敷き詰める敷き方を f_n 通りとする．また T_1 を使わずに敷くとき，その敷き詰め方を g_n 通りとする．ただし，$n,\ k$ は整数である．

(1)　$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_2+f_1+1$ であることを示せ．

(2)　f_n を求めよ．

(3)　$g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$ であることを示せ．

(4)　g_n を求めよ．　(阪大*)

1.4　n を自然数とする．

(1)　$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の展開式を求めよ．

(2)　$n \geqq 3$ のとき次の不等式を証明せよ．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 3$$

(3)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を証明せよ.

(4)　$n \geqq 3$ のとき $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ を証明せよ.

(類:東北大*，豊橋技大*)

§2. 無限数列

2.1　2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のよぅに定義する.

(i)　$a_1 = 0$,　$b_1 = 10$

(ii)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 \leqq 3$　ならば　$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,　$b_{n+1} = b_n$ とし,

$\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 > 3$　ならば　$a_{n+1} = a_n$,　$b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ とする.

このとき以下の問に答えよ.

(1)　$a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3$ を求めよ.

(2)　$a_n > 0$ となる最小の n を求めよ.

(3)　$b_n - a_n$ を n の式で表せ.

(4)　すべての自然数 n に対して不等式 ${a_n}^2 \leqq 3 < {b_n}^2$ が成り立つことを証明せよ.

(5)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ および $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.　(長岡技大)

2.2　数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数に対して，関係

$$a_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq r < 1$$

を満たしているとき次のことを証明せよ.

(1)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ は収束する.　(阪大*)

2　微 分 法

§4. 関数の増減

4.1　関数 $f(x) = -x^3 + ax$ について

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(東北大)

§7. 導関数の応用

7.1　(1)　関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{p + \cos x}{\sin x}$ $(\sin x \neq 0)$ とする．$\{f(x)\}^2$ の最小値およびそのときの $\cos x$ の値を p を用いて表せ．ただし，$p^2 > 2$ とする．

(2)　$p^2 > 2$ として，関数 $g(x)$ を $g(x) = \dfrac{\sin x}{p + \sin x + \cos x}$ とする．(1) の結果を使い，$g(x)$ の最大値および最小値を p を用いて表せ．

(豊橋技大)

7.2　曲線 $y = x^2 - k$ $(k > 0)$ がある．この曲線上に $x = a_1$ に対応する点 P_1 をとり，P_1 における曲線の接線と x 軸の交点の x 座標を a_2 とする．$x = a_2$ に対応する点 P_2 をとり，P_2 における曲線の接線と x 軸の交点の x 座標を a_3 とする．同様のことを繰り返し，数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を作る．ただし，a_1 は $a_1 > \sqrt{k}$ である定数とする．このとき次の問に答えよ．

(1)　a_n と a_{n+1} の関係を漸化式で示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．　(三重大*，類 : 富山大*)

7.3　$f(x) = ax^3 + bx$ とする．曲線 $y = f(x)$ が正方形の領域 $-1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1$ を 4 つの部分に分けるとき，次の問に答えよ．　(阪大*)

(1)　$a,\ b$ の条件を求めよ．

(2)　ba 平面上で $a,\ b$ の満たす範囲を示せ．

3　積 分 法

§8. 不定積分

8.1　次の積分 I_n $(n \geqq 1)$ について漸化式を求めよ.

(1)　$I_n = \displaystyle\int x(\log x)^n dx$　(東商船大)　　(2)　$I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$

§9. 定積分

9.1　(1)　$f(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - \alpha^2| dx$ を α で表せ.

(2)　$f(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ のとき α の値を求めよ.　(豊橋技大)

4　ベクトルと図形

§11. ベクトル

11.1　四角形 ABCD において，対角線 AC と BD の交点を O とする．点 O は対角線 AC を $1:p$ に内分し，対角線 BD を $p:1$ に内分している．辺 AD を $1:q$ に内分する点を M，辺 BC を $q:1$ に内分する点を N とし，点 O を原点とする点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とするとき以下の問に答えよ．ただし，p, q は正の実数である．　(豊橋技大)

(1)　点 O を原点とする点 M, N の位置ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いてどのように表されるか.

(2)　3 点 M, O, N は一直線上にあり，かつ AD $/\!/$ BC であることを示せ.

(3)　$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$，$|\boldsymbol{b}| = 4p|\boldsymbol{a}|$ のとき，$\mathrm{MN} \perp \mathrm{BC}$ になる q の値を求めよ.

§13. 空間のベクトルと図形

13.1　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平面の中で $\boldsymbol{e}_1$ に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$，さらに $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_3$ とする．このようにして正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を作る方法を**グラム・シュミットの直交化**という．$\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ と取ればよい．次の各組のベクトルを正規直交化せよ.

(1)　$\boldsymbol{a}=(0,\,1,\,1),\ \boldsymbol{b}=(1,\,1,\,0),\ \boldsymbol{c}=(0,\,0,\,1)$　(神戸大*)

(2)　$\boldsymbol{a}=(1,\,0,\,1),\ \boldsymbol{b}=(1,\,1,\,1),\ \boldsymbol{c}=(0,\,1,\,-1)$　(九大*)

13.2　次の式を証明せよ．$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ は内積，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は外積を表す．　(東北大*)

(1)　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

(2)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$

13.3　空間に原点 O と点 A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 0, 1) があり，直線 OA を l, 直線 BC を m とする．平面 π は点 (1, −1, 1) を通り，直線 l, m の π 上への正射影が平行な直線または 1 点と直線であるようなものとする．このような平面 π のうち，原点からの距離が最大になるものを求めよ．

(東大)

13.4　球 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に接し点 A(0, 0, 3) を通る平面について次の問に答えよ．　(長岡技大*)

(1)　このような平面で y 軸に平行なものの方程式を求めよ．

(2)　このような平面が x 軸，y 軸に交わるとき，x 軸との交点を P, y 軸との交点を Q として，線分 PQ の最小値を求めよ．

13.5　2 点 A(0, 1, 2), B(5, 2, 9) がある．平面 α は A を通り直線 AB に垂直であるとする．

(1)　平面 α と x 軸の交点を Q とするとき，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OQ}$ であることを証明せよ．

(2)　OA を軸として点 Q を回転させたとき，点 Q が再び平面 α に交わる点 T の座標を求めよ．　(豊橋技大)

13.6　k は定数で $k>\sqrt{3}$ とする．次の問に答えよ．　(豊橋技大*)

(1)　平面 $x+y+z=k$ 上で $yz+zx+xy=1$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\,y,\,z)$ は曲線 C をえがく．定点 $\mathrm{K}\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)$ から C 上の点への距離を求めよ．

(2)　解答用紙面を平面 $x+y+z=k$ とするとき，曲線 C を図示せよ．

(3)　$yz+zx+xy=1,\ \sqrt{3}\leqq x+y+z=k\leqq 2\sqrt{3}$ を満たす点が作る空間の体積を求めよ．

5　行列と行列式

§14. 行　列

14.1　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ について，級数 $B = E + \sum_{n=1}^{\infty} A^n$ を求めよ.

(名工大)

14.2　$AD - BC = 1$ のとき次の等式を証明せよ.　(長崎大*)

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$$

ただし，$A + D = 2\cos\theta$ とし，A_n, B_n, C_n, D_n は次の式で与えられるものとする.

$$A_n \sin\theta = A\sin n\theta - \sin(n-1)\theta, \quad B_n \sin\theta = B\sin n\theta$$
$$C_n \sin\theta = C\sin n\theta, \quad D_n \sin\theta = D\sin n\theta - \sin(n-1)\theta$$

§15. 1 次変換

15.1　平面上の点 (x, y) に点 (x'', y'') を対応させる規則が，次の (i), (ii) によって与えられている.

(i)　$x' = x + y$, $y' = 3x + 2y$ とする.

(ii)　点 (x', y') を原点のまわりに，反時計方向に $45°$ 回転して得られる点を (x'', y'') とする.

この規則によって直線 $y = ax + b$ の点がすべてこの直線上に移されるとき a, b の値を求めよ.　(豊橋技大)

15.2　平面上の 1 次変換 f が任意の直交するベクトルを直交するベクトルに移すものとする. そのとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の作る角と $f(\boldsymbol{u})$, $f(\boldsymbol{v})$ の作る角は等しいことを示せ.　(岡山大*)

§16. 行列式

16.1　$x + y + z = \pi$　のとき次の行列式の値を求めよ.　(北大)

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos z & \cos y \\ \cos z & -1 & \cos x \\ \cos y & \cos x & -1 \end{vmatrix}$$

16.2 次の行列式で定義される関数について，$g(x,\,y,\,z)$, $h(x,\,y,\,z)$ は $f(x,\,y,\,z)$ で割り切れることを証明し，その商を求めよ．

$$f(x,\,y,\,z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}, \quad g(x,\,y,\,x)=\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

$$h(x,\,y,\,z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

(長岡技大)

16.3 次の連立方程式を解け．

(1)
$$\begin{cases} \phantom{3x_1+{}} x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=5 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \end{cases}$$

(東商船大)

(2)
$$\begin{cases} (m+1)x_1+x_2+x_3=m-2 \\ x_1+(m+1)x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+(m+1)x_3=-2 \end{cases}$$

(北大)

§17. 行列の固有値と対角化

17.1 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ． (山梨大)

17.2 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，

(1) A の固有値と単位固有ベクトルを求めよ．

(2) $\exp(tA)$ を求めよ．t は定数とする． (北大*)

17.3 x, y, z の同次 2 次式

$$f(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz$$

について，次の問に答えよ． (長岡技大)

(1)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくとき，$f(x,\, y,\, z) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が成り立つような対称行列 A を求めよ．

(2)　新しい変数 u, v, w が

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で与えられるとき，$f(x,\, y,\, z)$ を u, v, w で表せ．

17.4　実 2 次形式を $g(x,\, y,\, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6yz$ で表し，行列 $F = (f_{ij})$ は 3 次の対称行列である．

(1)　ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と対称行列 F を用いることにより ${}^t\boldsymbol{x}F\boldsymbol{x} = g(x,\, y,\, z)$ が成立している．この行列 F を求めよ．

(2)　F の固有値および単位固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を求めよ．

(3)　列ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を横に並べて作られる $P = (\boldsymbol{e}_1 \;\; \boldsymbol{e}_2 \;\; \boldsymbol{e}_3)$ が直交行列であることを確かめよ．また，座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ とおいて 2 次形式 $g(x,\, y,\, z)$ が標準化できることを示せ．ただし $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする．　　(阪大)

17.5　(1)　実数 a, b, c が $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たすとき，対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

は固有値として 0 (重複度 2) と 1 をもつことを示せ．

(2)　逆に，固有値として 0 (重複度 2) と 1 をもつ対称行列 A に対して，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数 $a,\ b,\ c$ が存在して，A が上記の形に書けることを示せ．　(岡山大*)

17.6　3 次の正方行列 A を $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)　M_3 を 3 次正方行列全体の作るベクトル空間とし，M_3 上の 1 次変換 $\varphi_A\ :\ M_3 \to M_3$ を，任意の 3 次正方行列 X に対して

$$\varphi_A(X)=AX$$

と定義する．φ_A の固有値，固有ベクトルを求めよ．　(東工大*)

§18.　1 次従属・1 次独立と行列の階数

18.1　4 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}b & c \\ a & -\sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}c & c \end{pmatrix}$ とし，基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4$ とするとき，次の問に答えよ．　(山梨大)

(1)　$A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2,\ A\boldsymbol{e}_3,\ A\boldsymbol{e}_4$ が 1 次独立であるとき $a,\ b,\ c$ の関係を求めよ．

(2)　任意の x に対して $|A\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$ であるとき $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

18.2　$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　k を適当に定めて $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(2)　(1) で得られた表し方は一通りではない．その理由を述べよ．

(電通大*)

18.3　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ が与えられている．その

とき次の問に答えよ． (千葉大*)

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 像 $\mathrm{Im}\ A$ の表す空間図形を求めよ．

(3) $\boldsymbol{b}$ が 核 $\mathrm{Ker}\,A$ の要素と直交することを示せ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

像 $\mathrm{Im}\ A$ は $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ であるベクトル $\boldsymbol{y}$ の集合，核 $\mathrm{Ker}\,A$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合で，どちらも部分空間を作る．

$$\mathrm{Im}\ A = \{\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \mid \text{任意のベクトル}\,\boldsymbol{x}\}, \qquad \mathrm{Ker}\,A = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

18.4 $f\ :\ R^4 \to R^3$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x - y + z + w \\ x + 2z - w \\ x + y + 3z - 3w \end{pmatrix}$

で定義される線形写像とする．このとき f の像および核の基底と次元を求めよ． (九大*)

18.5 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \text{\Large 0} \\ 0 & -1 & a & & \\ & \text{\Large 0} & & 1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数はいくらか．

(2) 行列 A が非負定値であるための条件を求めよ．(非負定値とは任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geqq 0$ であることをいう．)

(3) 部分空間 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を求めよ． (図情大)

18.6 4 次元ベクトル空間 R^4 において部分空間 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

とする．

(1)　W の基底を1組求めよ．

(2)　W の直交補空間の正規直交基底を1組求めよ．　(東工大)

18.7　2次以下の実数係数多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 全体で作る線形空間(ベクトル空間)を V とする．

(1)　V の変換 $T\colon f(x) \to \int_{-1}^{1} (t-x)^2 f(t)dt$ は V の線形変換であることを示せ．

(2)　基底 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関して，この線形変換 T を表す行列を求めよ．

(名工大)

問題集　3

1　微 分 法

§1. いろいろな関数の導関数

1.1　放物線 $y^2 = 4px \quad (p > 0)$ について次のことを示せ．

(1)　焦点 $\mathrm{F}(p,\, 0)$ を極，x 軸を始線とするとき，$x = p + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ である．

(2)　この放物線の極座標に関する方程式は $r = \dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ である．

(3)　焦点 F を通る任意の弦を PQ とするとき $\dfrac{1}{\mathrm{FP}} + \dfrac{1}{\mathrm{FQ}}$ は一定である．

1.2　だ円 C ： $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について次の性質を証明せよ．　(新潟大*)

(1)　点 $\mathrm{F}(\sqrt{3},\ 0)$ と C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向との作る角を θ とするとき次の式が成り立つ．

$$r = \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

(2)　だ円 C 上の 2 点を結ぶ線分を C の弦という．点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP, FQ の長さをそれぞれ p, q とするとき，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ は一定である．

(3)　点 F で互いに直交する C の 2 つの弦の長さの逆数の和は一定である．

1.3　p, q は $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす実数であるとき，次の不等式を証明せよ．　(鹿児島大*)

(1)　b は正の実数として，$x \geqq 0$ でつねに

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p - bx + \frac{1}{q}b^q \geqq 0$$

(2)　$a_i > 0$, $b_i > 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とするとき

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \Big(\sum_{1=1}^{n} {a_i}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{1=1}^{n} {b_i}^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

§3. テイラーの定理

3.1 関数 $x^{n-1}\log x$ の第 n 次導関数について次の式を証明せよ．(室蘭工大)

$$\{x^{n-1}\log x\}^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$$

3.2 関数 $y(x) = \tan^{-1}x$ について次の問に答えよ．

(千葉大, 類：信州大, 名工大)

(1) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) (1) の両辺を n 回微分して，$y^{(n+2)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$ の関係を示せ．$y^{(0)} = y$ とする.

(3) $y^{(n)}(0)$ の値を求めよ.

(4) $\tan^{-1}x$ のマクローリン展開を求めよ.

3.3 関数 $y(x) = \sin^{-1}x$ について次の問に答えよ．(類：東農工大, 山口大)

(1) y' と y'' を求めよ.

(2) 次の式を数学的帰納法で証明せよ.

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (1+2n)xy^{(n+1)} - n2y^{(n)} = 0$$

(3) $y^{(n)}(0)$ を求めよ.

3.4 $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\log(x+\sqrt{1+x^2})$ とする．次の問に答えよ．(東商船大)

(1) $(1+x^2)y' + xy = 1$ が成り立つことを示せ.

(2) (1) の両辺を $n+1$ 回微分して，次の式を証明せよ.

$$(1+x^2)y^{(n+2)} + (2n+3)xy^{(n+1)} + (n+1)^2y^{(n)} = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) $y^{(n)}(0)$ を求め，$y(x)$ をマクローリン展開せよ.

3.5 $f_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}\{(x^2-1)^n\}^{(n)}$ とするとき，次の問に答えよ．(東北大)

(1) $2n$ 次の多項式 $(x^2-1)^n$ の k 次の項の一般式を書け.

(2) $f_n(0)$ を求めよ.

(3) $\dfrac{f_{n+2}(0)}{f_n(0)}$ を求めよ.

3.6 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ とする．(東農工大*)

(1) 項別微分することにより，$f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$ を示せ.

(2) $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ が定数になることを示し，その値を求めよ.

2　積 分 法

§4. いろいろな不定積分

4.1　次の関数を積分せよ．

(1)　$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$　(名工大)　(2)　$\dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$　(都立大)

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$　(京都工繊大*)

§5. 定積分とその応用

5.1　第 1 象限において円 $x^2+y^2=4$ と双曲線 $xy=1$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．　(北大)

5.2　n を自然数とする．

(1)　次の不等式を証明せよ．　(類:千葉大)

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n}$ を求めよ．　(岡山大*)

(3)　$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ とするとき，$0<a_{n+1}<a_n$ を証明し，$n\to\infty$ とするとき a_n が収束することを示せ．　(阪大*)

5.3　次の定積分の値を求めよ．

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+4x^2+3}dx \quad (n=0,\,1,\,2,\,3)$$　(東北大)

5.4　$P(x)$ が 3 次の整式であるとき，次の式が成り立つことを示せ．(図情大)

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left\{P(a)+P(b)+4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

5.5　n を自然数とし，t $(0\leqq t\leqq \pi)$ を媒介変数とする方程式

$$x=1-e^{-t},\ y=\sin^{2n} t$$

で表される平面上の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，次の問に答えよ．　(九大)

(1)　S_{n-1} と S_n の関係式を求めよ．

(2) S_n を求めよ．

5.6 次の各積分について漸化式を導き，その値を求めよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}, \qquad I_0 = \frac{\pi}{4}$$ (京都工繊大*)

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^n}\,dx$

$$I_n = \frac{3n-2}{3n-3} I_{n-1}, \qquad I_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$ (神戸大*)

5.7 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ とするとき，次の値を求めよ． (東北大, 類：電通大)

(1) I_1

(2) $I_{2n+1} - I_{2n-1}$

(3) $I_{2n+2} - I_{2n}$

(4) I_{2n-1}

5.8 ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ について次のことを証明せよ．

(鳥取大*)

(1) $x = r^2$ とおくことにより

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2s-1} dt$$

(2) $p,\ q > 0$ に対して

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

とおくとき

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$
$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

5.9 $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ とするとき，次の問に答えよ． (九大)

(1) $t + s \geqq 0$ で $0 \leqq t \leqq 1$ の領域を st 平面に図示せよ．

(2) $g(s) = \displaystyle\int_0^1 e^{2t} f(t+s) dt$ とするとき，これを $s < -1$, $-1 \leqq s \leqq 0$, $0 < s$ の場合に分けて計算せよ．

(3) $g(s)$ の最大値とそのときの s の値を求めよ．

5.10 連続関数 $f(x)$ に対して

$$f_n(x) = \int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく. (鳥取大*)

(1) x に関する導関数 $f_1{}'(x)$, $f_2{}'(x)$ を求めよ.

(2) $f_n{}'(x) = x f_{n-1}(x)$ $(n \geqq 1)$ であることを証明せよ.

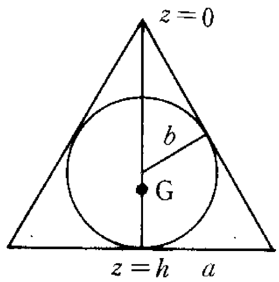
(3) $f_n(x)$ の第 n 次導関数 $f_n{}^{(n)}(x)$ を求めよ.

5.11 底辺の半径 a, 高さ h の円すいと半径 b の球がある. (九大*)

(1) 円すいの体積 V, 表面積 S, 重心 G の座標 $(r_G,\ z_G)$ を積分操作により を求めよ.

(2) S を一定にして V を最大にするときの h を a で表せ.

(3) 図のように, 球が円すいに内接するとき, h を a と b で表せ.



3 偏微分と重積分

§6. 偏導関数

6.1 3 つの定点 $A(a_1,\, a_2)$, $B(b_1,\, b_2)$, $C(c_1,\, c_2)$ がある. A, B, C と異なる点 $P(x,\, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき, 次の式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(長岡技大*)

6.2 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とするとき, 関数 $f(r)$ について次の式を求めよ.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(r)$, $\dfrac{\partial}{\partial y} f(r)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(r)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(r)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f(r)$

(2) 次の式を r だけの関数で表せ.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(r)$$

(東北大, 類:愛媛大*)

6.3 関数 f, g が 2 回微分可能であるとき, $z(x,t) = f(x - ct)g(x + ct)$

は次の偏微分方程式を満たすことを証明せよ．ただし，c は定数とする．

$$z\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big) = \Big(\frac{\partial z}{\partial t}\Big)^2 - c^2\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2$$

(弘前大*)

6.4　関数 $f(x,\,y)$ に対して

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

と書く．原点 O の近くで $f(x,\,y)$ が無限回微分可能であり，その範囲の各点 P で

$$R_n(\mathrm{P}) = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\mathrm{P}) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ならば，次の 2 変数関数のマクローリン展開が成り立つ．

$$f(x,\,y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + \cdots$$

これを用いて，次の関数のマクローリン展開を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　(東工大)　(2)　$e^{ax}\cos by$　(金沢大)

§7. 偏導関数の応用

7.1　(1)　点 $\mathrm{P}(X,\,Y)$ からだ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ へ引いた 2 つの接線の接点が $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ であるとき，x_1x_2, y_1y_2 を X と Y で表せ．

(2)　(1) の 2 つの接線が直交するような点 $\mathrm{P}(X,\,Y)$ の軌跡を求めよ．

(東北大)

7.2　放物線 $y^2=4px$ の焦点を通る弦の両端における接線は直交することを示せ．　(北大)

7.3　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする．

(1)　1 次変換 f による直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の像を求めよ．

(2)　xy 平面上の単位円 $x^2+y^2=1$ の f による像の曲線上で原点からの距離が最大になる点の座標を求めよ．　(豊橋技大*)

7.4　$x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ であるとき，次の問に答えよ．　(東農工大)

(1)　$z_x,\ z_y$ を求めよ．

(2)　$(y-z)z_x+(z-x)z_y=x-y$ を証明せよ．

§8. 重　積　分

8.1　次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^m} \quad (m>2) \qquad D : x \geqq 1,\ \ y \geqq 1$$ (鳥取大*)

8.2　記号 $\max(a, b)$ は $a,\ b$ の値のうち大きいほうを表すものとする．領域 $D : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$ における $\max(x^2, y)$ の重積分を求めよ．

(大阪府大)

8.3　次の関数の領域 D における重積分を求めよ．(阪大*)

$$\frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} \qquad D : x^2+y^2 \leqq 1$$

8.4　曲面 $S : z=x^2+y^2$ の $z \leqq 4$ の部分でできる容器を z 軸の正方向を上向きにして水をいっぱい満たす．次の体積を求めよ．(長岡技大*)

(1)　満たされた水の体積

(2)　容器を静かに 45° 傾けて水をこぼしたとき，残った水の体積

4　微分方程式

§9. 1 階微分方程式

9.1　平面上で O を原点とする．曲線 C 上の任意の点 P における接線が直線 OP を原点を中心として 30° 回転したものに平行である．次の問に答えよ．

(九大)

(1)　直交座標 (x, y) に関して曲線の満たす微分方程式を求めよ．

(2)　(1) の微分方程式を極座標 (r, θ) で表せ．

(3)　曲線 C が直交座標の点 $(0, 1)$ を通るとき，曲線 C の方程式を求めよ．

§10. 2 階微分方程式

10.1　次の微分方程式を示された初期条件のもとで解け．(都立科技大)

$$y''-y=e^{2x}, \quad y(0)=a, \quad y'(0)=b$$

10.2　次の問に答えよ．(九大*)

(1)　$z(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dt^2}+mz=0$ (m は正の定数) の一般解を求めよ．

(2)　t の関数 $x(t),\ y(t)$ の連立微分方程式

$$\begin{cases} x''(t)+2x-\ \ y=0 \\ y''(t)-\ \ x+2y=0 \end{cases}$$

の解を求めたい．そのため，この微分方程式に１次変換

$$\begin{cases} x=\ \ X+\ \ Y \\ y=aX+bY \end{cases} \qquad (a,\ b\ は定数)$$

を行う．X に関する方程式が Y を含まないように，また Y に関する方程式が X を含まないようにするための $a,\ b$ の値を求めよ．

(3)　$X,\ Y$ の一般解を用いて，初期条件 $t=0$ で $x=2,\ x'=0,\ y=0,\ y'=0$ であるような解を求めよ．

10.3　$f(x)$ を連続関数とするとき次の問に答えよ．　(長岡技大*)

(1)　$\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\,dt=0$ を求めよ．

(2)　次の等式が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

$$-f(x)=x+\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$

10.4　$y=\sin(a\sin^{-1}x)$ (a は定数) とする．

(1)　次の微分方程式が成り立つことを示せ．

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0 \qquad (-1<x<1)$$

(2)　$y^{(n)}(0)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ．　(京都工繊大*)

10.5　$f(x)$ は２回微分可能で $f''(x)$ が連続であるとし，すべての実数 $x,\ h$ に対して

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)\cos h$$

を満たしているとする．このとき次の問に答えよ．　(岡山大*)

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}\{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\}$ を計算し，$y=f(x)$ が解となるような y に関する微分方程式を作れ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

10.6　関数 $f(x)$ はすべての実数で定義され何回でも微分可能であり，$f(0) = 1$，$f'(0) = -1$，$f''(0) = 1$, また異なる実数 u, v に対して等式

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \qquad ①$$

を満たしているものとする．このとき次の問に答えよ．　(新潟大*)

(1)　任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して

$$f(x+y)-f(x-y) = 2f'(x)y \qquad ②$$

が成り立つことを示せ.

(2)　任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して

$$f''(x+y) = f''(x-y) \qquad ③$$

が成り立つことを示せ．さらに $f''(x)$ を求めよ．

(3)　$f(x)$ を求めよ．

5　複 素 数

§11. 複素数と複素数平面

11.1　z_1, $\cdots$, z_n, w_1, $\cdots$, w_n は絶対値が 1 以下の複素数とする．このとき次の不等式が成り立つことを証明せよ．　(阪大*)

$$|z_1z_2\cdots z_n - w_1w_2\cdots w_n| \leqq \sum_{j=1}^{n}|z_j - w_j|$$

付録　確　率

§1. 確　率

1.1　w の間隔で多数の平行線がある．この平行線と θ の角度になるように長さ l の針を落としたとき，針が直線と交差する確率はいくらか．また，θ を任意にした場合その確率はどうなるか．ただし，$w > l$ とする．(東大)

1.2　図のように，1 辺の長さが 2 の正三角形のすべての頂点と各辺の中点に 1 から 6 の番号をつけ, さいころの出た目とこの番号を対応させる．さいころを 3 回投げて出た目の番号の点をたがいに結
んで図形を作る．3 点が同一直線上にある場合は,
この図形は三角形ではない.

(1)　三角形ができる確率を求めよ.

(2)　正三角形ができる確率を求めよ.

(3)　できる図形の面積の期待値を求めよ.　(豊橋技大)

1.3　機械 A は確率 a で 0 を出力し，確率 $1-a$ で 1 を出力する $(0 < a < 1)$. 機械 B は 0 または 1 を入力として受け取り，0 または 1 を出力するが, 0 が入力されたとき 0 を出力する確率が b であり，1 が入力されたとき 1 を出力する確率が c である $(0 \leqq b \leqq 1,\ 0 \leqq c \leqq 1)$．次の問に答えよ.

(1)　機械 A の出力を機械 B に入力する．機械 B の出力が 1 となる確率を求めよ.

(2)　機械 A の出力を機械 B に入力し，出力を見たら 1 であった．このとき機械 A の出力が 1 であった確率を求めよ.

機械 A の出力を機械 B に入力し，機械 B の出力を第 1 回目の出力とする．次に機械 B の 1 回目の出力を機械 B に入力し，その出力を第 2 回目の出力とする．この手続きを繰り返したとき，第 n 回目の出力が 1 になる確率を p_n とする.

(3)　$a = 0.5$ のとき，p_n を求めよ.

(4)　$c = 1$ のとき，p_n を求め，$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ.　(岐阜大*)

§2. 確率分布

2.1 A, B の２人がじゃんけんをして勝てば１点をやりとりするゲームを行う．A, B がグー，チョキ，パーを出す確率を g_A, g_B, c_A, c_B, p_A, p_B とする．

(1) １回行うとき A の期待値を求めよ．

(2) A がパーを，B がグーを出さないとき，A の期待値を c_A, c_B を用いて表せ．

(3) さらに $c_A = c_B = c$ として A の期待値が最大になる c を求めよ．

(4) $c_A = c_B = \dfrac{1}{2}$ として A の期待値を求め，さらに A と B のどちらが有利か示せ． (阪大*)

付録　統　計

§4. 正規分布

4.1 母集団分布が未知母数 θ を含み，確率密度が $f(x,\theta)$ であるとき，大きさ n の標本値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n になる確率密度は，それらが互いに独立ならば,

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n\,; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta)$$

で与えられる．これを θ の**尤度関数**という．$L(\theta)$ を最大にする θ の値 $\hat{\theta}$ を母数 θ の**最尤推定値**という．

x_1, x_2, $\cdots$, x_n が確率密度

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & (0 \leqq x \leqq 1)\ \text{のとき} \\ 0 & x < 1,\ 1 < x\ \text{のとき} \end{cases}$$

をもつ分布からの標本とするとき，θ の最尤推定値を求めよ． (九大*)

4.2 $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して，確率分布が

$$p_r = P(X = r) = e^{-\mu} \frac{\mu^r}{r!} \quad (\mu \text{は正の定数})$$

で与えられる離散分布を**ポアソン分布**という．この分布について

(1) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} p_r = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = 1$ であることを証明せよ．

(2) 平均，分散を求めよ． (名大)