位相空間の正則開集合全体がつくる完備ブール代数（p. 202 のために）

田中尚夫

2013/12

P を位相空間，$u \subseteq P$ が正則開集合（r.o. と略記）とは $u = u^R$ が成り立つこと，ここで $u^R = u^{-c-c}$．また $u^i = u^{c-c}$ とおく．したがって $u^R = u^{-i}$．u は閉：$u = u^-$．u は開：$u = u^i$（$\Leftrightarrow u^{c-c} = u \Leftrightarrow u$ は閉集合の補集合）．$v \subseteq w \Leftrightarrow v^i \subseteq w^i$．$(u \cap v)^i = u^i \cap v^i, (u \cap v)^- \subseteq u^- \cap v^-$．

r.o. 集合の基本性質

1) u : r.o. $\Leftrightarrow u$: 開； 2) u : 開 $\Leftrightarrow u \subseteq u^R$； 3) $u \subseteq v \Leftrightarrow u^R \subseteq v^R$；
4) $u^R = u^{RR}$ $\quad \therefore u^R$ は r.o； 5) u, v : r.o. $\Leftrightarrow u \cap v$: r.o. ；

定理 $B = \mathrm{RO}(P) = \{u \subseteq P : u = u^R\}$ は p. 202 で定義された諸演算に関して完備ブール代数 (complete Boolean algebra) をなす．

証明 u, v が r.o. ならば $u \cdot v, u + v, u'$ は r.o. である．u' について：$(u')^R = (u^{-c})^{-c-c} = (u^R)^{-c} = u^{-c} = u'$ ($\because u^R = u$)．演算のベキ等性，交換性，結合法則の成立は明らか．吸収法則：$u \cdot (u + v) = u \cap (u \cup v)^R = u^R \cap (u \cup v)^R = (u^{-c} \cup (u \cup v)^{-c})^{-c}) = \cdots = \{u^-\}^{c-c} = u$．$\mathbf{0} + u = (\mathbf{0} \cup u)^R = u^R = u$, etc. また，$u \cdot v = u$ で定義された関係 $u \leq v$ は $u + v = v$ と同値であり，しかも $\subseteq$ と一致する．分配法則：$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$．証明：$u \cdot (v + w) = u \cap (v \cup w)^R = (u^- \cap (v \cup w)^-)^i \supseteq (u \cap (v \cup w))^{-i} = \{(u \cap v) \cup (u \cap w)\}^R = u \cdot v + u \cdot w$．逆の包含関係を示すために：Lemma. a が開集合ならば $(a \cap b)^- \supseteq a \cap b^-$．［証：もし $p \in a \cap b^-$ かつ $p \notin (a \cap b)^-$ なる p があれば，a：開 & $p \in a$ より $\exists : p$ の近傍 $V_1(p) \subseteq a$．$p \in b^-$ より $\forall : p$ の近傍 $V(p) \cap b \neq \phi$．第 2 条件から $\exists V_2(p) : V_2(p) \cap (a \cap b) = \phi$．$V_3(p) \subseteq V_1(p) \cap V_2(p)$ なる $V_3(p)$ をとれば，$V_3(p) \subseteq a$, $V_3(p) \cap b \neq \phi$, $V_3(p) \cap (a \cap b) = \phi$．これら 3 者は矛盾する．］ $u \cdot v + u \cdot w = (u \cap (v \cup w))^{-i}$（$u$：開なので Lemma により）$\supseteq (u \cap (u \cup w)^-)^i = u^i \cap (v \cup w)^{-i} = u^i \cap (v \cup w)^R = u \cap (v \cup w)^R = u \cdot (v + w)$．かくて $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$．上で $u^i = u$ に注意．

残るは完備性である．A_λ : r.o. for all $\lambda \in \Lambda$ とする．p.202 により $\bigvee\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = (\bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})^R$, $\bigwedge\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = (\bigcap\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})^R$ である．これらがそれぞれ $\sup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\inf\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に等しいことを証明する．証：$A_\lambda \subseteq \bigvee\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ なることは：$A_\lambda = A_\lambda^R \subseteq (\bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})^R = \bigvee\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$．そこで $A_\lambda \subseteq A$ for all $\lambda \in \Lambda$ なる任意の r.o. 集合 A をとる．$A_\lambda \subseteq A$ for all $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq A \Rightarrow (\bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})^R \subseteq A^R \Rightarrow \bigvee\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq A$． $\therefore \bigvee\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \sup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$．inf についても同様． $\square$

なお，次の**補元の公理**が成り立つ：$u + u' = \mathbf{1}$, $u \cdot u' = \mathbf{0}$.　証明：$u \subseteq u^-$ を利用する．ここで $u' = u^{-c}$ であった.

本補遺に対するあとがき

この度本書を増刷して誤植の訂正をして下さり，さらに p.202 の「B が完備ブール代数になる」ことの証明も加えていただけることになった.

序文に「定理の内容をすっかり忘れてしまって，再現できないのが残念」と書いた．ところがしばらく前に書類を整理中「1958 年 6 月服部昭先生集中講義」というノートが見つかった．それにより「環の left global demension のある種の特徴づけに関する定理の証明に整列定理が使用された」ことがわかった．詳細に関心を持つ読者は次の文献を参照されたい.

M. Auslander, On the dimension of modules and algebras (III),
Nagoya Math. J. 9 (1955), 67–77.

（2013 年 12 月　著者）