補遺　行列 C*が対角行列になるための条件(本文の 153 ページ参照)

本文では行列 C*が対角行列になるための条件式(4.70)と式(4.71)を証明なしで示した．証明を示した書物が少ないので，自習のためにやや複雑だが紹介する．

（１）必要十分条件（その１）

線形代数学によれば，「二つ以上の行列が一つの直交行列によって同時に対角化できるための必要十分条件は，それらの行列が互いに可換であることである」．ここで直交行列とは

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1} \tag{1}$$

を満たすような行列のことである．

いまの「三つの行列 $\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ をモード行列 $\mathbf{T}$ によって同時に対角化する」という問題の場合，モード行列 $\mathbf{T}$ は直交行列ではないので，上の定理が使えるためには若干の変形が必要になる．

いま使用しているモード行列 $\mathbf{T}$ は，関係式

$$\mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} = \mathbf{E} \qquad (\mathbf{E}\text{ は単位行列}) \tag{2}$$

$$\mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{\Omega} \tag{3}$$

を満足する．ここでもし，質量行列を

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0{}^T\mathbf{M}_0 \tag{4}$$

と表せば，式(2)は

$$(\mathbf{M}_0\mathbf{T})^T(\mathbf{M}_0\mathbf{T}) = \mathbf{E} \tag{5}$$

となるので，$\mathbf{M}_0\mathbf{T}$ なる行列が直交行列であることがわかる．これを

$$\mathbf{M}_0\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \tag{6}$$

と表しておく．

そうすると，

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_0{}^T(\mathbf{M}_0{}^{-1})^T\mathbf{K}\mathbf{M}_0{}^{-1}\mathbf{T}_0\\ &= \mathbf{\Omega}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_0{}^T(\mathbf{M}_0{}^{-1})^T\mathbf{C}\mathbf{M}_0{}^{-1}\mathbf{T}_0\\ &= \mathbf{C}^*\end{aligned} \tag{8}$$

となるので，ここで

$$(\mathbf{M}_0{}^{-1})^T\mathbf{K}\mathbf{M}_0{}^{-1} = \mathbf{K}_0 \ , \quad (\mathbf{M}_0{}^{-1})^T\mathbf{C}\mathbf{M}_0{}^{-1} = \mathbf{C}_0 \tag{9}$$

とおいてみると，上の問題は「二つの行列$\mathbf{K}_0, \mathbf{C}_0$を直交行列$\mathbf{T}_0$によって同時に対角化する」という問題に変形される．

そうすると，線形代数学の定理によって，$\mathbf{C}^*$が対角行列になるための必要十分条件は，「二つの行列$\mathbf{K}_0, \mathbf{C}_0$が互いに可換であることである」となる．

したがって，式(9)によって$\mathbf{C}_0\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0\mathbf{C}_0$をつくり整理すると，$\mathbf{C}^*$が対角行列になるための必要十分条件(4.71)が得られる．

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \tag{10}$$

（２）必要十分条件（その２）

今度は，上と異なる式(4.70)について考える．

$\mathbf{C}^*$が対角行列$diag[c_1^{\ *}\ c_2^{\ *} \cdots\ c_n^{\ *}]$であるとすると，それは（ｎ自由度系ならば）ｎ個の互いに独立な対角行列 $\mathbf{A}_i = diag[a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}]$（$i$＝1,2,･･･,$n$）の一次結合で表せる．対角要素でベクトルを定義すれば，

$$\begin{bmatrix} c_1^{\ *} \\ c_2^{\ *} \\ \vdots \\ c_n^{\ *} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

のように表すことができる．これを簡単のために

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{A}\mathbf{b} \tag{12}$$

と表しておく．このとき行列$\mathbf{A}$は正則であればどんなものでもよい．ところで正則な行列ならば別のある正則行列$\mathbf{B}$によって Vandermonde 行列に変換できる．すなわち，Vandermonde 行列を不減衰系の固有振動数ω_i (i=1,2,･･･,n)を用いて

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{\ 2} & \omega_1^{\ 4} & \cdots & \omega_1^{\ 2(n-1)} \\ 1 & \omega_2^{\ 2} & \omega_2^{\ 4} & \cdots & \omega_2^{\ 2(n-1)} \\ 1 & \omega_3^{\ 2} & \omega_3^{\ 4} & \cdots & \omega_3^{\ 2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{\ 2} & \omega_n^{\ 4} & \cdots & \omega_n^{\ 2(n-1)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

と書けば，いつでも

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\mathbf{B} \tag{14}$$

とすることができる．したがって，式(11)は

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\mathbf{Bb}\\ &=[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]^T\end{aligned} \tag{15}$$

と書くと，

$$\begin{bmatrix} c_1^{\ *} \\ c_2^{\ *} \\ c_3^{\ *} \\ \vdots \\ c_n^{\ *} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{\ 2} & \omega_1^{\ 4} & \cdots & \omega_1^{\ 2(n-1)} \\ 1 & \omega_2^{\ 2} & \omega_2^{\ 4} & \cdots & \omega_2^{\ 2(n-1)} \\ 1 & \omega_3^{\ 2} & \omega_3^{\ 4} & \cdots & \omega_3^{\ 2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{\ 2} & \omega_n^{\ 4} & \cdots & \omega_n^{\ 2(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

のようにすることができる．これをもとの対角行列に戻すと

$$\mathbf{C}^*=a_1\mathbf{E}+a_2\boldsymbol{\Omega}+a_3\boldsymbol{\Omega}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{\Omega}^{n-1} \tag{17}$$

となる．これの左から$(\mathbf{T}^T)^{-1}$，右から$\mathbf{T}^{-1}$をかけてやると

$$\mathbf{C}=a_1\mathbf{M}+a_2\mathbf{K}+a_3\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}+\cdots+a_n(\mathbf{KM}^{-1})^{n-2}\mathbf{K} \tag{18}$$

が得られる. これは, $\mathbf{C}^*$が対角ならばこれを満たす係数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$が存在し, 逆に式(17)を満たす係数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$が存在すれば，$\mathbf{C}^*$が対角になることを意味している.

こうして式(18)が，$\mathbf{C}^*$が対角になるための必要十分条件であることがわかった.

とくに，二自由度系の場合，$n=2$だから式(18)は

$$\mathbf{C}=a_1\mathbf{M}+a_2\mathbf{K} \tag{19}$$

となり，係数を書き換えたのが式(4.70)である.

実際に$\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$が与えられているとき，式(18)を満たす係数が存在するかどうかを調べるには別の計算が必要になるので，$\mathbf{C}^*$が対角になるかどうかを知るだけならば，式(10)が成立するかどうかを調べるほうがずっと簡単である.