ファイバー束と
ホモトピー: 解答例

玉木 大

信州大学 理学部

Version: 2020 年 4 月 23 日

付録 B

問いの解答例

「ファイバー束とホモトピー」では, 読者の理解を助けるため, 本文の流れを切らないため, そして筆者が手抜きをするために, 「問い」を随所に挿入した。

これらの内多くのものは, 信州大学で 4 年生のセミナーに用いたときに, 当時の学生により解答が与えられた。そこで, それらの解答に適宜加筆修正したものを, 付録 B として,

`https://morikita.co.jp/books/mid/005461`

から公開することにした。もちろん, 間違い等があれば, それは筆者の責任である。

B.1　第 1 章 問いの解答例

解答例 (1.1.4)**.** まず, どちらからどちらへの写像を作るかを考えないといけない。簡単なのは, $S^1 \times S^1$ から T^2 への写像である。写像

$$f : S^1 \times S^1 \longrightarrow T^2$$

を

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ((2 + x_1)x_2, (2 + x_1)y_2, y_1)$$

で定義する。これは $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への多項式で定義された写像の制限であるから, 連続である。T^2 の定義から, f は $S^1 \times S^1$ から T^2 への写像となる。

$S^1 \times S^1$ はコンパクトで T^2 は Hausdorff なので, f が全単射であることを示せばよい。

まず T^2 の定義から, これは全射である。単射であることを示すために, 2 点

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)), ((x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)) \in T^2$$

をとり, $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = f((x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2))$ と仮定する。

$$\begin{aligned}(2 + x_1)x_2 &= (2 + x'_1)x'_2 \\ (2 + x_1)y_2 &= (2 + x'_1)y'_2 \\ y_1 &= y'_1\end{aligned}$$

より, 上 2 つの式の両辺を 2 乗して足すと

$$((2 + x_1)x_2)^2 + ((2 + x_1)y_2)^2 = ((2 + x'_1)x'_2)^2 + ((2 + x'_1)y'_2)^2$$

となる。$x_2^2 + y_2^2 = 1$, $(x'_2)^2 + (y'_2)^2 = 1$ より

$$(2 + x_1)^2 = (2 + x'_1)^2$$

である。$2 + x_1, 2 + x'_1 > 0$ より $2 + x_1 = 2 + x'_1$, よって $x_1 = x'_1$ となる。これより, $x_2 = x'_2$ と $y_2 = y'_2$ を得る。よって単射である。

以上で, f が同相写像であることが示された。

解答例 (1.1.6)**.** 例 1.1.5 にも図 1.5 があるが, これは正確なものではない。

パラメータ表示が与えられているので, 座標軸を定めてから自分で絵を描くのも難しくない。パラメータ φ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ が計算し易い値に取り, パラメータ t を $-\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{2}$ まで動かすと, 線分を描くことができる。そして φ を動かせば, どのような曲面が描かれるか分かるだろう。

あるいは, コンピュータに描かせてもよい。曲面のグラフを描くソフトはいろいろあるが, 例えば, 図 B.1 は gnuplot というソフトを使ったものである。

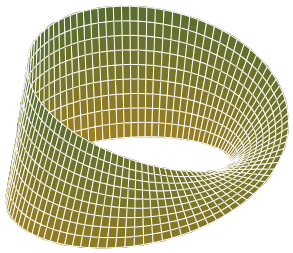

図 B.1　gnuplot による Möbius の帯

これは, 例えば図 B.2 のようなコマンドで描くことができる:

```
set parametric

unset colorbox
unset key
unset border
unset tics

set style line 100 lw 0.1 lc rgb "white"
set pm3d depthorder hidden3d ls 100
set pal defined (0 "olive", 1 "dark-olivegreen")
set view 40,42

set urange [0:2*pi]
set vrange [-0.5:0.5]

x(u,v)=(2+v*cos(u/2))*cos(u)
y(u,v)=(2+v*cos(u/2))*sin(u)
z(u,v)=v*sin(u/2)

splot x(u,v),y(u,v),z(u,v) w pm3d
```

図 B.2　図 B.1 のための gnuplot のコマンド

B.2　第 2 章 問いの解答例

解答例 (2.1.5)**.** まず, p_n の場合を考える。底空間の開被覆の取り方は, p_2 の場合と同じものを用いて

$$S^1 = U_1 \cup U_i \cup U_{-1} \cup U_{-i}$$

とする。どれでも本質的に同じなので, U_i の場合だけ考えよう。

$$\begin{aligned} p_n^{-1}(U_i) &= \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, 0 \le \theta < 2\pi, e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \in U_i \right\} \\ &= \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, 0 \le n\theta < 2n\pi, \sin n\theta > 0 \right\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, 2k\pi < n\theta < (2k+1)\pi \right\} \end{aligned}$$

となるので, $\widetilde{U}_k = \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, 2k\pi < n\theta < (2k+1)\pi \right\}$ とおけば,

$$p_n^{-1}(U_i) = \coprod_{k=0}^{n-1} \widetilde{U}_k$$

である。$p_n|_{\widetilde{U}_k} : \widetilde{U}_k \to U_i$ が同相写像であることはすぐ分かる。

次に exp の場合を考える。やはり, 底空間の開被覆は, p_2 と同じもの使う。すると,

$$\begin{aligned}
\exp^{-1}(U_i) &= \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, e^{2\pi i t} \in U_i \right\} \\
&= \{ t \in \mathbb{R} \,|\, \sin 2\pi t > 0 \} \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ t \in \mathbb{R} \,|\, 2k\pi < 2\pi t < (2k+1)\pi \} \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, k < t < k + \frac{1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

となる。$\tilde{U}_k = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, k < t < k + \frac{1}{2} \right\}$ とおくと

$$\exp^{-1}(U_i) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{U}_k$$

と分解することが分かる。三角関数の性質より exp の $\widetilde{U}_k$ への制限は, U_i への同相写像である。

解答例 (2.3.13)**.** まず

$$(\ell * c_{x_0})(t) = \begin{cases} \ell(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ x_0, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

である。後半の x_0 に留まっている時間を減らすホモトピーを作ればよい。例えば, 図 B.3 より,

$$H(t,s) = \begin{cases} \ell(\frac{2t}{s+1}), & 0 \le t \le \frac{s+1}{2} \\ x_0, & \frac{s+1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

と定義すればよい。

解答例 (2.4.2)**.** まず, 単位元については $e^{-1} = e$ より分かる。結合律は

$$\begin{aligned}
\mu_X^{\mathrm{op}}(\mu_X^{\mathrm{op}}(x,g),h) &= \mu_X(h^{-1}, \mu_X(g^{-1}, x)) \\
&= \mu_X(h^{-1}g^{-1}, x) \\
&= \mu_X((gh)^{-1}, x) \\
&= \mu_X^{\mathrm{op}}(x, gh)
\end{aligned}$$

より成り立つ。

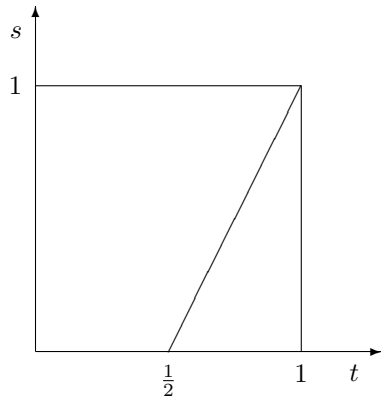

図 B.3　c_{x_0} の割合を減らすホモトピー

B.3　第 3 章 問いの解答例

解答例 (3.1.9)**.** 閉集合でも悪くはない。実際, 被覆空間の場合に定理 2.2.3 や定理 2.2.19 で, 閉集合による分割を用いている。ただ, 一般に閉被覆を扱うのは難しい。例えば, U が開集合ならば, 任意の $x \in U$ に対し U は x の近傍である。ところが, 閉集合 A と $x \in A$ に対し, A が x の近傍になっているのは, かなり特殊な場合である。特に, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ となる場合があるので, 困る。

解答例 (3.1.10)**.** まず p は $(x, y, z) \in M$ に対し

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

と表わせるから連続である。

次に g_1 が同相写像であることを示そう。三角関数で定義してあることから, 三角関数の逆関数を使うのが自然なアイデアである。一つの方法は, $U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ を上半分と下半分に分けて, それぞれで $\cos\varphi$ の逆関数を使って逆写像を作り, それを貼り合せることである。ここでは, tan を用い, そのような分割を使わない方法を紹介しよう。

次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
(0,2\pi) \arrow[rr, "g_1"] \arrow[d, "\times\frac{1}{2}"'] & & U_1 \\
(0,\pi) \arrow[r, "-\frac{\pi}{2}"] & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \arrow[r, "\tan"] & \mathbb{R} \arrow[u, dotted, "h_1"']
\end{tikzcd}$$

この図式が可換になるような h_1 が存在し, それが同相写像であることが示せれば, 同相写像の合成写像として g_1 が同相写像であることが分かる。三角関数の半角公式を使えば h_1 を見付けるのはそれほど難しくなく,

$$h_1(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right)$$

であることが分かる。またその逆写像も

$$k_1(x,y) = \frac{-y}{1-x}$$

で与えられることは簡単な計算で分かり, h_1 が同相写像であることが示される。

g_1 が同相写像であることを用いれば, f_1 が同相写像であることを示すのはそれ程難しくない。実際, f_1 の逆写像 $\ell_1 : p^{-1}(U_1) \to (0,2\pi)\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ は

$$\ell_1(x,y,z) = \left(g_1^{-1}(p(x,y,z)), \frac{z}{\sin\frac{g_1^{-1}(p(x,y,z))}{2}}\right)$$

で与えられる。

次に φ_2 を作るために,

$$\begin{aligned}
&f_2 : p^{-1}(U_2) \longrightarrow (-\pi,\pi)\times\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \\
&g_2 : U_2 \longrightarrow (-\pi,\pi)
\end{aligned}$$

を

$$\begin{aligned}
f_2(\varphi,t) &= \left(\left(2+t\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \left(2+t\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, t\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\
g_2(\varphi) &= (\cos\varphi, \sin\varphi)
\end{aligned}$$

で定義する。g_2 が同相写像であることは, 図式

$$\begin{tikzcd}
(-\pi,\pi) \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\times\frac{1}{2}"'] & U_2 \\
\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \arrow[r, "\tan"] & \mathbb{R} \arrow[u, dotted, "h_2"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする h_2 が存在することから分かる。実際,

$$h_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

とすればよい。これを用いると, f_2 の逆写像 ℓ_2 は

$$\ell_2(x,y,z) = \begin{cases} \left(g_2^{-1}(p(x,y,z)), \frac{z}{\sin\frac{g_2^{-1}(p(x,y,z))}{2}}\right), & p(x,y,z) \neq (1,0) \\ (0, x-2), & p(x,y,z) = (1,0) \end{cases}$$

で与えられる。これらを用いて φ_2 を

$$\varphi_2 = (g_2 \times 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}) \circ f_2^{-1}$$

で定義すればよい。

解答例 (3.1.12)**.** $(2|z_1|^2-1, 2z_1\overline{z_2}) \neq (-1,0)$ から $z_1 \neq 0$ が得られる。このことに注意して, 例えば,

$$\varphi_-(z_1,z_2) = \left(2|z_1|^2-1, 2z_1\overline{z_2}, \frac{z_1}{|z_1|}\right)$$
$$\psi_-(x,z,w) = \left(w\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \frac{\overline{z}w}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}}\right)$$

とおけばよい。

解答例 (3.1.13)**.** 多様体論の教科書を見よ, というのはあまりにも不親切なので, 簡単に証明を述べる。まず開被覆としては,

$$U_+ = S^2 \setminus \{((0,0,-1)\}$$
$$U_- = S^2 \setminus \{((0,0,1)\}$$

による $S^2 = U_+ \cup U_-$ をとる。どちらも同じなので, U_+ 上の局所自明化写像

$$\varphi_+ : p^{-1}(U_+) \longrightarrow U_+ \times \mathbb{R}^n$$

を構成する。

記号を簡単にするために, $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{s} = (0,0,-1)$ とおく。点 $\boldsymbol{x} \in U_+$ を取る。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{n}$ のとき, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{s}$ より, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{n}$ は 1 次独立である。

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}\|}$$

とおく。このベクトルを法線ベクトルとする原点を通る平面を $P_{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})}$ とするとき, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ を軸とし, $P_{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{n}$ に重なるまで回転させる写像を

$$R_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

とする。また, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}$ のときは, $R_{\boldsymbol{x}}$ は恒等写像とする。

すると

$$R_{\boldsymbol{x}}(T_{\boldsymbol{x}}S^2) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

となる。そこで $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^2$ と同一視することにより,

$$\varphi_+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{x}, R_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}))$$

と定義する。その構成から, これは連続写像となる。

その逆写像は, $P_{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})}$ を逆方向に回転させることにより得られる。

解答例 (3.2.7)**.** 積が写像の合成で定義されているので, 結合律はみたす。恒等写像 1_X が単位元となる。同相写像の定義から $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ は逆写像 f^{-1} を持ち, f^{-1} も同相写像となる。よって f^{-1} が f の逆元となる。

解答例 (3.2.10)**.** ヒントは, $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = (U_\alpha \cap U_\beta) \cap (U_\beta \cap U_\gamma)$, $U_\alpha \cap U_\beta = U_\beta \cap U_\alpha$ である。G が部分群であるということは, 積で閉じていて, 逆元を取る操作で閉じているということである。まず, 積で閉じている必要があることを考えよう。$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ である場合を考える。$(x,y) \in (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times F$ に対し, 座標変換として $U_\alpha \cap U_\beta$, $U_\beta \cap U_\gamma$, $U_\alpha \cap U_\gamma$ 上の三つ

$$\begin{aligned}
(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x,y) &= \bigl(x, \Phi^{\alpha\beta}(x)(y)\bigr) \\
(\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta^{-1})(x,y) &= \bigl(x, \Phi^{\beta\gamma}(x)(y)\bigr) \\
(\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1})(x,y) &= (x, \Phi^{\alpha\gamma}(x)(y))
\end{aligned}$$

が考えられる。ところが,

$$(\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, y) = (\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, y)$$

なので,

$$\Phi^{\beta\gamma}(x) \circ \Phi^{\alpha\beta}(x) = \Phi^{\alpha\gamma}(x)$$

となる。このことから, $\Phi^{\alpha\beta}$ 達の値域は合成で閉じているべきである。

また $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の逆写像が $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ であることから,

$$\Phi^{\alpha\beta}(x)^{-1} = \Phi^{\beta\alpha}(x)$$

となり, $\Phi^{\alpha\beta}$ 達の値域は逆写像を取る操作で閉じているべきである。

解答例 (3.3.8)**.** まず, μ は行列の積で与えられる写像

$$\tilde{\mu} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

の制限写像として得られることに注意する。よって $\tilde{\mu}$ が連続であることを示せばよい。$M_n(\mathbb{R})$ の位相は, 同一視 $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ により与えられていたが, 合成

$$\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\mu}} M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

は, 各成分が実数の和と積で与えられているので連続である。

ν の連続性は, 線形代数の練習問題である。つまり,

$$\nu(A) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

と余因子を用いて定義され, 余因子は成分の和とスカラー倍で書けるので, 連続である。

解答例 (3.3.12)**.** まず, $A \in O(n)$ ならば $\det A = \pm 1 \neq 0$ より $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ となる。つまり $O(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である。よって, $O(n)$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せばよい。つまり, 任意の $A, B \in O(n)$ に対し, $AB^{-1} \in O(n)$ を示せばよい。$A, B \in O(n)$ より $A^{-1} = {}^tA$, $B^{-1} = {}^tB$ であるから

$$\begin{aligned} {}^t(AB^{-1})(AB^{-1}) &= {}^t(A^tB)(AB^{-1}) \\ &= {}^{tt}B^tAAB^{-1} \\ &= BA^{-1}AB^{-1} \\ &= E_n \end{aligned}$$

となり, $AB^{-1} \in O(n)$ がわかる。

$\mathrm{SO}(n)$ は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の二つの部分群 $O(n)$ と $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ の共通部分として, 部分群になる。

解答例 (3.3.14)**.** 直交群の場合 (問い 3.3.12) と同じように, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が位相群になっていて, $U(n)$ がその部分群であることを示してもよい。あるいは, 直接示してもよい。詳細は省略する。

解答例 (3.3.17)**.** これはちょっと難しい。積

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$$

が連続であることは, 実数や複素数の場合と同様であるが, 問題は逆元の対応である。行列式が使えないので, 余因子展開の公式が使えない。これについては, 横田の本 [横田一 71] の第 2 章 §3 (2) に証明があるので, それを見てもらいたい。

ただ, $\mathrm{Sp}(n)$ に限れば, 逆元の対応が連続であることを示すのはそれほど難しくない。定義より, 共役と転置により与えられるからである。

解答例 (3.3.22)**.** 包含関係が成り立つこと, そして部分群であることは難しくない。閉集合であることを示そう。ほとんどが, 連続写像による閉集合の逆像であることを示せばよい。例えば, 写像

$$n : \mathbb{R}^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$$

を $n(x) = \frac{x}{|x|}$ で定めるとこれは連続であるが,

$$\mathbb{R}_{>0} = n^{-1}(\{1\})$$

であるから, $\mathbb{R}_{>0}$ は $R^\times$ の閉集合である。同様に, 写像

$$\begin{aligned}
|-| &: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\
\det &: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times \\
\det &: \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\
\det &: O(n) \longrightarrow \{\pm 1\} \\
\det &: U(n) \longrightarrow S^1
\end{aligned}$$

が連続であるが, 値域の空間は全て Hausdorff だから $\{1\}$ は閉集合, よってこれらの写像による $\{1\}$ の逆像として, S^1, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ は全て閉集合となる。

$O(n)$ については, $\varphi(A) = {}^tAA$ で定まる写像

$$\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

により, $O(n) = \varphi^{-1}(\{E_n\})$ と表わされるから閉集合である。$U(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ についても同様である。

最後に $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ が閉集合であるから, $\mathbb{R}^{n^2} \subset \mathbb{C}^{n^2}$ も閉集合, よって $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ も $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉集合になる。$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ についても同様であり, 相対位相で $U(n)$ は $\mathrm{Sp}(n)$ の, $O(n)$ は $U(n)$ の閉集合になる。

解答例 (3.3.24)**.** これは, 離散位相空間の間の任意の写像は連続であることから分かる。

解答例 (3.3.30)**.** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$ であるということは, $ad - bc = 1$ かつ

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つことである。よって

$$ad - bc = 1 \tag{B.1}$$
$$a^2 + c^2 = 1 \tag{B.2}$$
$$ab + dc = 0 \tag{B.3}$$
$$b^2 + d^2 = 1 \tag{B.4}$$

が $A \in \mathrm{SO}(2)$ の必要十分条件である。(B.2) と (B.4) から, $0 \leq \theta < 2\pi$ と $0 \leq \varphi < 2\pi$ により $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = -\sin\varphi$, $d = \cos\varphi$ と書けることが分かる。これらを残り 2 つの式に代入すると

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi &= 1 \\ -\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi &= 0, \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \varphi) &= 1 \\ \sin(\theta - \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。$0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$ より, $\theta - \varphi = 0$ となり,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と書けることが分かった。また, $0 \leq \theta < 2\pi$ と限定すれば, θ は一意的である。S^1 の元 z も, $0 \leq \theta < 2\pi$ と限定すれば一意的に $z = e^{i\theta}$ と表わせるから

$$r(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で全単射 $r : S^1 \to \mathrm{SO}(2)$ が定義される。

S^1 がコンパクトで $\mathrm{SO}(2)$ が Hausdorff なので, r が連続であることが示されれば, r が同相写像であることが分かる。r の連続性は, 例えば $e(\theta) = e^{i\theta}$ で定義される写像 $e : [0, 2\pi] \to S^1$ を用いて, 次のようにして示すことができる。まず合成 $r \circ e$ は, 各成分が連続関数で与えられているので連続である。よって, 開集合 $U\mathrm{SO}(2)$ に対し $(r \circ e)^{-1}(U) = e^{-1}(r^{-1}(U))$ は $[0, 1]$ の開集合である。そして e が開写像であることから $r^{-1}(U)$ が S^1 の開写像であることが分かる。

解答例 (3.3.32)**.** 包含写像であることを確かめるのは省略し, 閉集合であることを示す。

$M_{2n}(\mathbb{R})$ を 2×2 にブロック分割し, その 4 つのブロックを対応させる写像を

$$q : M_{2n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$$

とする。Δ_n を $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ の対角集合とすると, $M_n(\mathbb{R})$ が Hausdorff 空間なので Δ_n は閉集合となる。そして

$$r(M_n(\mathbb{C})) = q^{-1}(\Delta_n \times \Delta_n)$$

であるから $r(M_n(\mathbb{C}))$ は閉集合となる。

$$r(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = r(M_n(\mathbb{C})) \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$$

であるから, $r(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ の閉集合である。他も同様である。

解答例 (3.3.33)**.** 写像

$$c : \mathbb{H} \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$$

を

$$c(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) = c((x_1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i)j) = \begin{pmatrix} \overline{x_1 + x_2 i} & -x_3 + x_4 i \\ \overline{x_3 + x_4 i} & \overline{x_1 + x_2 i} \end{pmatrix}$$

で定義する。$x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathrm{Sp}(1)$, つまり $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ のとき, $c(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) \in \mathrm{SU}(2)$ であること, そして c が準同型であることは, 容易な計算で分かる。

逆写像は

$$c^{-1}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 + x_3 j$$

で与えられる。

解答例 (3.3.34)**.** 問い 3.3.33 から $\mathrm{Sp}(1)$ と S^3 が同相であることを示せばよいが, それは

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(1) &= \left\{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \;\middle|\; \overline{(a + bi + cj + dk)}(a + bi + cj + dk) = 1\right\} \\ &= \left\{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \;\middle|\; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right\}\end{aligned}$$

から分かる。

解答例 (3.3.35)**.** $\mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Sp}(1)$ より, $\pi : \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(3)$ を作ることを考えよう。すなわち, $q \in \mathrm{Sp}(1)$ に対し, 線形写像 $\pi(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で $\mathrm{SO}(3)$ の元で表現されているものを作る。そのために「$\mathbb{H}$ の純虚数の集合」を

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \{x_2 i + x_3 j + x_4 k \,|\, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

と定義し, $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ と同一視する。

$q \in \mathrm{Sp}(1)$ と $x \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ に対し,

$$\pi(q)(x) = \overline{q}xq$$

と定義する。これが $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ に属することを示すためには, $\overline{\pi(q)(x)} = -\pi(q)(x)$ を示せばよい。これは $\overline{x} = -x$ より

$$\overline{\overline{q}xq} = \overline{q}x\overline{\overline{q}} = -\overline{q}xq = \pi(q)(x)$$

となることから分かる。四元数の積の分配法則から, $\pi(q)$ は線形写像になる。まず, $\pi(q)$ が $O(3)$ の元で表わされることを示すためには, $\pi(q)$ でノルムが保たれることを示せばよい。同一視 $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ の元で, $\mathbb{R}^3$ のノルム $\|x\|^2$ は, 四元数の積で $\overline{x}x$ と同一視できる。そして $\overline{q} = q^{-1}$ より

$$\begin{aligned}\|\pi(q)(x)\|^2 &= \overline{\pi(q)(x)}\pi(q)(x) \\ &= \overline{q}\overline{x}q\overline{q}xq \\ &= \overline{q}\|x\|^2 q \\ &= \|x\|^2\overline{q}q \\ &= \|x\|^2\end{aligned}$$

となる。これで写像

$$\pi : \mathrm{Sp}(1) \longrightarrow O(3)$$

が得られた。これが準同型であることは, 容易に分かる。定義から, これは成分の四則演算で与えられるので, 連続である。同相 $\mathrm{Sp}(1) \cong S^3$ より $\mathrm{Sp}(1)$ は連結であり, $E_3 \in \pi(\mathrm{Sp}(1)) \cap \mathrm{SO}(3)$, そして $\mathrm{SO}(3)$ は $O(3)$ の中で開かつ閉であることから, $\pi(\mathrm{Sp}(1)) \subset \mathrm{SO}(3)$ となる。よって, 準同型

$$\pi : \mathrm{Sp}(1) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

が得られた。π の定義から $q \in \mathrm{Ker}(\pi)$ であるための必要十分条件は $q \in \mathbb{R}$ であることが分かり, よって

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \left\{q \in \mathbb{R} \mid q^2 = 1\right\} = \{\pm 1\}$$

となり, 位数 2 の部分群である。

写像 π が全射であることはちょっと面倒である。幾何学的に証明するのなら, 例えば, 次の二つを示せばよい。

1. $\mathrm{SO}(3)$ の任意の元は, ある原点を通る直線の周りの回転であることを示す。
2. $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ で $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ であるものにより $q = \cos\theta + u\sin\theta$ と表したとき, $\pi(q)$ は, $\boldsymbol{u}$ の周りの各 2θ の回転である。

詳細は省略するが, 例えば, 次の Conway と Smith の本に簡潔な説明がある。

J.H. コンウェイ, D.A. スミス, (山田 修司 翻訳).
四元数と八元数.
培風館, 2006 年.
ISBN: 978-4563003692.

解答例 (3.4.17)**.** X のコンパクト集合 K と開集合 U に対し $\nu^{-1}(W(K,U))$ がコンパクト開位相で開集合であることを示せばよい。ところが, 命題 3.4.16 の証明の議論から

$$\nu^{-1}(W(K,U)) = W(X \setminus U, X \setminus K)$$

である。今 $X \setminus U$ は X の閉集合で X はコンパクトなので $X \setminus U$ はコンパクト, また K がコンパクトで X が Hausdorff なので $X \setminus K$ は開集合, よって $\nu^{-1}(W(K,U))$ はコンパクト開位相の定義より開となる。

解答例 (3.5.4)**.** 定義を確かめるだけなので省略する。

解答例 (3.5.5)**.** 行列とベクトルの積が作用の条件をみたすことは, 線形代数学で学んでいるはずである。

解答例 (3.5.6)**.** まず, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおき, $[n]$ から自分自身への写像全体の集合を $\mathrm{Map}([n], [n])$ で表す。$\Sigma_n \subset \mathrm{Map}([n], [n])$ と考えることができる。このとき, 全単射 $e : \mathrm{Map}([n], X) \xrightarrow{\cong} X^n$ がある。(問い A.1.13 参照。) また, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
X^n \times \Sigma^n \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, hook] & X^n \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Map}([n], X) \times \mathrm{Map}([n], [n]) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Map}([n], X)
\end{tikzcd}$$

を得る。ただし, $\circ$ は写像の合成で与えられる写像である。

このように考えると, μ が単位元に関する条件と結合律をみたすことは, 写像の合成 $\circ$ の対応する性質から従う。

解答例 (3.5.12)**.** まず, ℓ を表わす方程式を決めないといけないが, y 軸になる場合も含めて表すために

$$a_1 x + a_2 y = 0$$

としよう。ただし $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ である。この $\boldsymbol{a}$ が ℓ の法線ベクトルであり, 鏡映は

$$T_\ell(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

で与えられる。これを行列で表わすと

$$T_\ell(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{pmatrix} a_2^2 - a_1^2 & -2a_1a_2 \\ -2a_1a_2 & a_1^2 - a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる。これが直交行列であることは, 簡単な計算で分かる。

また $R = TT_\ell$ とすると, $R \in O(2)$ かつ

$$\det R = \det T \det T_\ell = (-1)^2 = 1$$

となり, $R \in \mathrm{SO}(2)$ であることが分かる。また $T^2 = E_2$ より,

$$T_\ell = TTT_\ell = TR$$

となる。

解答例 (3.5.13)**.** D_{2n} は $O(2)$ の部分群なので, その元は線形写像である。よって, 原点を頂点とする三角形の像は, 原点以外の頂点の像で決まる。原点を中心とし y 軸に関して対称な正 n 角形 P_n を原点を頂点に持つ n 個の二等辺三角形に分割すると, 結局 P_n の頂点が P_n の頂点に写ることを示せばよいことが分かる。また D_{2n} は $R_{\frac{2\pi}{n}}$ と T で生成されているから, この二つの元の作用が P_n の頂点を頂点に写すことを示せばよいが, それは P_n の取り方からすぐ分かる。

解答例 (3.5.34)**.** まず, 条件から $\bar{f}$ は well-defined である。

開集合 $U \subset Y$ を取る。このとき,

$$\begin{aligned} p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) &= (\bar{f} \circ p)^{-1}(U) \\ &= f^{-1}(U) \end{aligned}$$

であり, f が連続だからこれは, X の開集合である。よって, 等化位相の定義より $\bar{f}^{-1}(U)$ は $X/_\sim$ の開集合である。

解答例 (3.6.2)**.** $e \in G$ を用いると, $x \sim_G x$ が言える。$x \sim_G x'$ ならば $x' = gx$ と書けるが, $x = g^{-1}x'$ であることより $x' \sim_G x$ となる。最後に, $x \sim_G x'$ かつ $x' \sim_G x''$ ならば, $x' = gx$, $x'' = hx'$ と書ける。これは $x'' = hgx$ を意味し, $x \sim_G x''$ となる。

解答例 (3.6.9)**.** $A \subset X$ を閉集合とすると, X がコンパクトなので A もコンパクト, よってその連続写像による像 $f(A)$ は Y のコンパクト集合である。Y が Hausdorff なので, $f(A)$ は閉集合となり, よって f は閉写像である。

もし f が全単射ならば, これは逆写像 f^{-1} が連続であることを意味し, f は同相写像になる。

解答例 (3.6.11)**.** $p : X \to X/_\sim$ を商空間を定義したときの射影とすると, 等化位相の定義より, これは連続写像である。よって, X がコンパクトのとき, $X/_\sim = p(X)$ はコンパクト空間の像となり, コンパクトである。

解答例 (3.6.15)**.** $p = 2$ の場合と同じようにやってもよいが, ここでは S^1 が群であることを使って証明してみよう。

$$f_p : S^1 \longrightarrow S^1$$

を $f_p(z) = z^p$ で定義すると, これが全射であることはすぐ分かる。よって準同型定理より, f_p から群の同型

$$\bar{f}_p : S^1 / \operatorname{Ker} f_p \xrightarrow{\cong} S^1$$

が誘導される。特に, $\bar{f}_p$ は全単射である。ここで, 等化位相の定義より $\bar{f}_p$ は連続となる。$S^1/\operatorname{Ker} f_p$ がコンパクト空間の商空間としてコンパクトであることから, $\bar{f}_p$ は閉写像, よって同相写像になる。

また, 群の同型

$$\operatorname{Ker} f_p = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; z^p = 1 \right\} = \left\{ e^{\frac{2\pi i k}{p}} \;\middle|\; k = 0, \ldots, p-1 \right\} \cong C_p$$

があり, 部分群 $\operatorname{Ker} f_p$ による S^1 の商空間は C_p の作用による商空間と一致する。よって, 同相

$$S^1/C_p \cong S^1$$

が得られた。

解答例 (3.6.19)**.** ヒントにあるように, Hopf 束の射影 $p : S^3 \to S^2$ を用いて,

$$f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \longrightarrow S^2$$

を $f([z_0, z_1]) = p(z_0, z_1)$ で定義する。まずこれが well-defined であることを示そう。$\omega \in S^1$ により

$$(z_0', z_1') = (\omega z_0, \omega z_1)$$

と表されるとき, $p(z_0, z_1) = (2|z_0|^2 - 1, 2z_0\overline{z_1})$ だったから

$$\begin{aligned} p(z_0', z_1') &= (2|\omega z_0|^2 - 1, 2\omega z_0 \overline{\omega z_1}) \\ &= (2|z_0|^2 - 1, 2\omega\overline{\omega} z_0 \overline{z_1}) \\ &= (2|z_0|^2 - 1, 2z_0\overline{z_1}) \\ &= p(z_0, z_1) \end{aligned}$$

となり, well-defined である。等化位相の定義より, f は連続になる。また p が全射だから f も全射となる。

次に単射を示そう。$f([z_0, z_1]) = f([z_0', z_1'])$ とすると $p(z_0, z_1) = p(z_0', z_1')$ であり

$$\begin{aligned} 2|z_0|^2 - 1 &= 2|z_0'|^2 - 1 \\ 2z_0\overline{z_1} &= 2z_0'\overline{z_1'} \end{aligned} \tag{B.5}$$

となる。これより, まず $|z_0| = |z_0'|$ がわかる。もし $z_0 = z_0' = 0$ ならば, $|z_1| = |z_1'| = 1$ となり,

$$(z_0', z_1') = (0, z_1') = \frac{z_1'}{z_1}(0, z_1) = \frac{z_1'}{z_1}(z_0, z_1)$$

である。これは $[z_0', z_1'] = [z_0, z_1]$ を示している。$z_0 \neq 0$ とする。(**??**) より,

$$z_1 = \frac{\overline{z_0'}}{\overline{z_0}} z_1'$$

となり,

$$\begin{aligned}
(z_0, z_1) &= \left(z_0, \frac{\overline{z_0'}}{\overline{z_0}} z_1' \right) \\
&= z_0 \overline{z_0'} \left(\frac{1}{\overline{z_0'}}, \frac{z_1'}{z_0 \overline{z_0}} \right) \\
&= z_0 \overline{z_0'} \left(\frac{z_0'}{|z_0'|^2}, \frac{z_1'}{|z_0|^2} \right) \\
&= \frac{z_0 \overline{z_0'}}{|z_0|^2} (z_0', z_1'),
\end{aligned}$$

よって $(z_0, z_1) \sim (z_0', z_1')$ となる。これで f が単射であることが示された。S^3 がコンパクトであることより, S^3/S^1 もコンパクト, そして S^2 が Hausdorff だから f は同相写像になる。

解答例 (3.6.20)**.** 実射影空間の場合を示す。包含写像

$$i_n : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

と射影

$$p_n : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right) / \mathbb{R}^\times$$

の合成 $p_n \circ i_n$ を考える。$(p_n \circ i_n)(-\boldsymbol{x}) = (p_n \circ i_n)(\boldsymbol{x})$ より, well-defined な写像 $f_n : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ を得る。また次の図式が可換になる:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d] & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[r, "f_n"'] & \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right) / \mathbb{R}^\times
\end{tikzcd}$$

等化位相の定義より, f_n は連続になる。全単射であることも容易に分かる。ここで $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は, コンパクト空間 S^n の商空間としてコンパクトなので, $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ が Hausdorff であることを示せばよい。2 点 $[\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}] \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ が異なる

とすると, $\boldsymbol{x}$ を通る直線と $\boldsymbol{y}$ を通る直線は平行ではない。そこで

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\}$$

とおくと $\varepsilon > 0$ となる。

$$U = \{t\boldsymbol{z} \mid t \in \mathbb{R}^\times, \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}$$
$$V = \{t\boldsymbol{z} \mid t \in \mathbb{R}^\times, \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}$$

とおくと, これらは $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ の開集合であるが,

$$U = p_n^{-1}(p_n(U))$$
$$V = p_n^{-1}(p_n(V))$$

であることから, $p_n(U)$ と $p_n(V)$ は $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ の開集合となる。$p_n(U) \cap p_n(V) = \emptyset$ より, $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^\times$ が Hausdorff であることが示された。

あるいは, 直接逆写像を作るのも難しくはない。

$$g_n : \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right)/\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

を

$$g_n([\boldsymbol{x}]) = \left[\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right]$$

で定義すればよい。

解答例 (3.6.26)**.** $gH, g'H \in G/H$ に対し $\overline{\mu}(g'g^{-1}, gH) = g'H$ である。

解答例 (3.6.29)**.** $f : X \to Y$ が, 定理 3.6.28 の条件をみたすことを確かめればよい。まず, X がコンパクトで Y が Hausdorff, そして f が全射であることから, f は等化写像である。

X の開集合 V と $x \in V$ で $V = f^{-1}(f(V))$ であるものに対し, X がコンパクトであることから, $\overline{V}$ はコンパクトである。よって定理の U として V をとればよい。

解答例 (3.6.30)**.** X が局所コンパクトより, 恒等写像 1_X は定理 3.6.28 の条件をみたす。

解答例 (3.6.31)**.** $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ で 1 点が閉集合ではないことを示せばよい。任意の $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ に対し

$$\overline{[x]} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$$

を示そう。$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を射影とする。任意の $[y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ とその任意の開近傍 U に対し, $p^{-1}(U)$ は y の開近傍であるから, ある $\delta > 0$ があり $(y-\delta, y+\delta) \subset p^{-1}(U)$ となる。ところが, 有理数の稠密性より $|x+r-y| < \delta$ となる $r \in \mathbb{Q}$ が存在する。これは, $x+r \in p^{-1}(U)$, よって $p(x+r) = [x+r] = [x] \in U$ を意味する。故に $[y] \in \overline{[x]}$ となり, $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \overline{[x]}$ であることが示された。

解答例 (3.6.32)**.** まず, 一般に $x \in G$ の開近傍 U に対し, e の開近傍 V で $V^{-}1 = V$, $V \cdot V \subset x^{-1}U$ であるものがとれることを示す。まず μ が連続であることより, $V' \times V' \subset \mu^{-1}(U)$ となる単位元の開近傍 V' がとれる。このとき $V = V' \cap (V')^{-1}$ とおけばよい。

さて, $p : G \to G/H$ を射影とする。$p(g) \neq p(g')$ と仮定する。つまり $g^{-1}g' \notin H$ である。H が閉集合であることより, $U \cap H = \emptyset$ となる $g^{-1}g'$ の開近傍 U が存在する。このとき $e \in gU(g')^{-1}$ である。g, g' をかける写像は同相写像なので, $gU(g')^{-1}$ も G の開集合であり, 最初に示したことから, 単位元の開近傍 V で $V \cdot V \subset gU(g')^{-1}$ かつ $V^{-1} = V$ であるものが存在する。このとき $g^{-1}V \cdot Vg' \subset U$ となる。$V_1 = Vg$, $V_2 = Vg'$ とおく。これらは, それぞれ g と g' の開近傍になり, $V_1^{-1}V_2 \subset U$ である。このとき $p(V_1) \cap p(V_2) = \emptyset$ かつ, $p(V_1)$ と $p(V_2)$ が開集合であることを示せばよい。ここで, 一般に部分集合 $A \subset G$ に対し, $p^{-1}(p(A)) = AH = \bigcup_{h \in H} Ah$ であるので, A が開集合ならば, $p(A)$ も開集合になる。よって, あとは $p(V_1) \cap p(V_2) = \emptyset$ を示せばよい。

$x \in V_1$ と $y \in V_2$ で $p(x) = p(y)$ であるものが存在したとすると, $x^{-1}y \in H$ である。ところが $V_1^{-1}V_2 \subset U$ より, $H \cap U \neq \emptyset$ となり矛盾する。よって $p(V_1) \cap p(V_2) = \emptyset$ となる。

解答例 (3.6.41)**.** G の作用が推移的であることから, $y = gx$ となる $g \in G$ が存在する。この g による共役

$$g(-)g^{-1} : G \longrightarrow G$$

により, $\mathrm{Iso}_x(G)$ が $\mathrm{Iso}_y(G)$ にうつされることはすぐ分かる。

解答例 (3.6.42)**.** ほとんど, 直交群 $O(n)$ の場合と同じである。$O(n)$ の場合は, $A \in O(n)$ であるための必要十分条件が A を行ベクトル分解してできる n 個のベクトルが $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることを用いて, $O(n)$ が $M_n(\mathbb{R})$ の有界集合であることを示した。同様に $A \in U(n)$ であるための必要十分条件は, A の行ベクトル達が $\mathbb{C}^n$ の複素内積空間としての正規直交基底であることが示される。それにより, $U(n)$ が $M_n(\mathbb{C})$ の有界閉集合であることが分かる。よって $U(n)$ はコンパクト位相群で

ある。

あとは, $U(n)$ の S^{2n-1} への作用が推移的であることを示せばよいが, それも $O(n)$ の場合と同じで, $v \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ に対し, v を含む $\mathbb{C}^n$ の複素内積空間としての正規直交基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, v\}$ を選び, それを並べた行列を A とすれば, $Av = e_n$ となる。

解答例 (3.6.44)**.** $s_+(\boldsymbol{x}) \in O(n)$ であることは計算するだけなのだが, うまく工夫しないと計算が大変である。例えば,

$$A = E_n - \frac{1}{1-x_n}B$$

と分解しよう。すると $\boldsymbol{x}' = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - 1)$ とおいて,

$$B = (x_1\boldsymbol{x}', x_2\boldsymbol{x}', \ldots, x_{n-1}\boldsymbol{x}', (x_n-1)\boldsymbol{x}')$$

と列ベクトルに分解できる。B は対称なので, 行ベクトル分解も

$$B = \begin{pmatrix} x_1{}^t\boldsymbol{x}' \\ \vdots \\ x_{n-1}{}^t\boldsymbol{x}' \\ (x_n-1)^t\boldsymbol{x}' \end{pmatrix}$$

となる。このとき, A は対称行列だから

$$A^tA = A^2 = E_n^2 - \frac{2}{1-x_n}B + \frac{1}{(1-x_n)^2}B^2 = E_n - \frac{2}{1-x_n}B + \frac{1}{(1-x_n)^2}B^2$$

となり,

$$B^2 = 2(1-x_n)B$$

を示せばよいことが分かる。ここで B^2 の (i,j) 成分は, $i, j < n$ のときは

$$\begin{aligned} x_ix_j\boldsymbol{x}'^t\boldsymbol{x}' &= x_ix_j(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_n-1)^2) \\ &= x_ix_j(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2x_n + 1) \\ &= 2x_ix_j(1-x_n) \end{aligned}$$

となり, $2(1-x_n)B$ の (i,j) 成分と一致する。$i < n$ かつ $j = n$ のときは, B^2 の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned} x_i(x_n-1)\boldsymbol{x}'^t\boldsymbol{x}' &= x_i(x_n-1)(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_n-1)^2) \\ &= 2x_i(1-x_n)(x_n-1) \end{aligned}$$

となる。そして B^2 の (n,n) 成分は

$$(x_n-1)^2\boldsymbol{x}'^t\boldsymbol{x}'=2(1-x_n)(x_n-1)^2$$

となり, $B^2=2(1-x_n)B$ が示された。

$s_+(\boldsymbol{x})$ の式は次のように考えれば見つけられる。$\boldsymbol{x}\in U_+$ に対し, $s_+(\boldsymbol{x})$ は $s_+(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}$ となる直交行列である。よって $s_+(\boldsymbol{x})$ の第 n 列は $\boldsymbol{x}$ でなければならない。

解答例 (3.6.49)**.** 仮定から, $x\in G/H$ の開近傍 U_x と連続写像

$$s_x:U_x\longrightarrow p^{-1}(U_x)$$

で $p\circ s_x=1_{U_x}$ となるものが存在する。このとき $\{U_x\}_{x\in G/H}$ は G/H の開被覆である。写像 $\varphi_x:p^{-1}(U_x)\to U_x\times H$ を

$$\varphi_x(g)=(p(g),s_x(p(g))^{-1}g)$$

で定める。G の積と逆元を取る写像の連続性, そして p と s_x の連続性から φ_x は連続となる。また, $s_x(p(g))^{-1}g\in H$ であることを示すためには, $s_x(p(g))^{-1}gH=H$, すなわち $gH=s_x(p(g))H$ を示せばよいが, これは

$$\begin{aligned}s_x(p(g))H&=p(s_x(p(g)))\\&=p(g)\\&=gH\end{aligned}$$

より分かる。

また, φ_x の逆写像 $\psi_x:U_x\times H\to p^{-1}(U_x)$ は

$$\psi_x(x,h)=s_x(x)h$$

で与えられる。

解答例 (3.7.11)**.** 開集合 $U\subset Y$ をとる。

$$(f|_{U_\alpha})^{-1}(U)=f^{-1}(U)\cap U_\alpha$$

であることと, $f|_{U_\alpha}$ が連続であることから, $f^{-1}(U)\cap U_\alpha$ は U_α の開集合となる。U_α が X の開集合であることから, $f^{-1}(U)\cap U_\alpha$ は X の開集合でもある。

$$f^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha\in A}f^{-1}(U)\cap U_\alpha$$

より, $f^{-1}(U)$ は X の開集合となる。

解答例 (3.7.14)**.** $B = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ を各 U_α 上で局所自明化 $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ を持つ B の開被覆とする。

$$E = \bigcup_{\alpha\in A} p^{-1}(U_\alpha)$$

は E の開被覆である。ここで射影 $p_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha$ は等化写像なので, $p|_{p^{-1}(U_\alpha)} : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ も等化写像である。

ここで $U \subset B$ をとり $p^{-1}(U)$ が E の開集合であると仮定すると, 各 α に対し, $p^{-1}(U) \cap p^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U \cap U_\alpha)$ も E の開集合である。特に, $p^{-1}(U \cap U_\alpha)$ は $p^{-1}(U_\alpha)$ の開集合となる。$p|_{p^{-1}(U_\alpha)}$ が等化写像であることから, $U \cap U_\alpha$ は U_α の開集合となる。U_α が B の開集合なので, $U \cap U_\alpha$ は B の開集合でもある。よって

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U \cap U_\alpha$$

は B の開集合となる。

解答例 (3.7.17)**.** 作用になっていることを確かめるのは難しくない。まず, $g, h \in G$ に対し

$$\begin{aligned}
\mu(gh, x, y) &= (x(gh)^{-1}, (gh)y) \\
&= (x(h^{-1}g^{-1}), (gh)y) \\
&= ((xh^{-1})g^{-1}, g(hy)) \\
&= \mu(g, (xh^{-1}, hy)) \\
&= \mu(g, \mu(h, x, y))
\end{aligned}$$

である。単位元については明らかであろう。

ここで, 逆元を取ることにより, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ と g と h の順序が入れ替わっていることで, うまく結合性が成り立ったことに注意する。よって, $(x, y) \mapsto (xg, gy)$ だと, 一般には結合性が成り立たないのでダメである。

解答例 (3.7.20)**.** 例 1.1.5 にならい, 円周 S^1 を

$$\begin{aligned}
S^1_+ &= \left\{(x, y) \in S^1 \,\middle|\, y \geq 0\right\} \\
S^1_- &= \left\{(x, y) \in S^1 \,\middle|\, y \leq 0\right\}
\end{aligned}$$

と分割し, それに合せ Möbius の帯を M_+ と M_- に分割する。写像

$$\varphi_+ : S^1_+ \times_{C_2} [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \longrightarrow M_+$$

を定義するために, $[(x,y),t] \in S^1_+ \times_{C_2} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を取る。このとき $0 \leq \theta \leq \pi$ により

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{aligned}$$

と表されていると仮定してよい。またこのような取り方は一意的である。半角の公式から

$$\begin{aligned} \cos^2\tfrac{\theta}{2} &= \frac{x+1}{2} \\ \sin^2\tfrac{\theta}{2} &= \frac{1-x}{2} \end{aligned}$$

であるが, $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ かつ $\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$ である。そこで

$$\varphi_+([(x,y),t]) = \left(\left(2 + t\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right), \left(2 + t\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right), t\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

と定義すると, これは M_+ に属する。

同様に, 写像

$$\varphi_- : S^1_- \times_{C_2} [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \longrightarrow M_-$$

を定義し, 共通部分で一致していることを示せば, 連続写像

$$\varphi = \varphi_+ \cup \varphi_- : S^1 \times_{C_2} [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \longrightarrow M$$

が得られる。定義域がコンパクトで値域が Hausdorff なので, これが全射であることを確かめれば同相写像であることが分かるが, 詳細は省略する。

B.4　第 4 章 問いの解答例

解答例 (4.1.2)**.** $y \in p^{-1}(x)$ に対し, $\tilde{f}(y) \in p'^{-1}(f(x))$ を示せばよい。つまり, $p'(\tilde{f}(y)) = f(x)$ を示せばよい。ところが, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

の可換性から,

$$\begin{aligned} p'(\tilde{f}(y)) &= f(p(y)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる。

解答例 (4.1.10)**.** $(\tilde{f}, f) : (E, B) \to (E', B')$ を束写像とする。$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{V_\mu\}_{\mu\in M}$ を, それぞれ B と B' の開被覆で, 局所自明化写像

$$\varphi_\lambda : p^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$$
$$\psi_\mu : p'^{-1}(V_\mu) \longrightarrow V_\mu \times F$$

を持つものとする。

構造群 G の全空間 E への作用の定義より, 図式

$$\begin{tikzcd}
E \times G \arrow[d] & p^{-1}(U_\lambda) \times G \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi_\lambda \times 1_G"] \arrow[d] & U_\lambda \times G \times G \arrow[d, "1\times\mu_G"] \\
E & p^{-1}(U_\lambda) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & U_\lambda \times G
\end{tikzcd}$$

は可換となる。E' についても同様の可換図式がある。よって, 立方体型の図式

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G \arrow[rr, "\varphi_\lambda \times 1_G"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde{f}\times 1_G"'] & & (U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G \times G \arrow[dr] \arrow[dd, "\varphi_\lambda"] & \\
& p^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \arrow[rr] \arrow[dd] & & (U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times G \arrow[dd] \\
(p')^{-1}(f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G \arrow[rr, "\psi_\mu \times 1_G"] \arrow[dr] & & (f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G \times G \arrow[dr] & \\
& (p')^{-1}(f(U_\lambda) \cap V_\mu) \arrow[rr, "\psi_\mu"'] & & (f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times G
\end{tikzcd}$$

において, 上の四角と下の四角は可換になる。奥と手前の四角は束写像の定義より可換になる。右の四角が可換であり, 横の写像が全て同相写像なので, 左の四角は可換になる。これらを合わせて求める可換図式を得る。

解答例 (4.1.14)**.** $xi = (E, B)$, $\xi' = (E', B')$, $\xi'' = (E'', B'')$ を同じファイバー F を持つファイバー束とし, $\boldsymbol{f} = (\tilde{f}, f) : \xi \to \xi'$, $\boldsymbol{g} = (\tilde{g}, g) : \xi' \to \xi''$ を束写像とする。その合成を

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} = (\tilde{g}, g) \circ (\tilde{f}, f) = (\tilde{g} \circ \tilde{f}, g \circ f)$$

で定義する。これが, ファイバーを保つ写像であることは, 可換図式を結合することにより分かる。また, $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ が各ファイバー上で同相写像なので, その合成 $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ も各ファイバー上で同相写像である。よって, まず, 構造群を考えなければ, $(\tilde{g},g)\circ(\tilde{f},f)$ は束写像である。

次に, 構造群が全て同じで, $(\tilde{f},f)$ と $(\tilde{g},g)$ が構造群も含め束写像であるとする。$U\subset B$, $U''\subset B''$ を局所自明化

$$\begin{aligned}\varphi &: p^{-1}(U)\longrightarrow U\times F\\ \varphi'' &: (p'')^{-1}(U'')\longrightarrow U''\times F\end{aligned}$$

を持つ開集合で, $U\cap U''\neq\emptyset$ であるものとする。このとき,

$$L^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU''} : U\cap(g\circ f)^{-1}(U'')\longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U\cap(g\circ f)^{-1}(U'') \arrow[ul, dotted, "\exists\bar{L}^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU''}"] \arrow[ur, "L^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU''}"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\bar{L}^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU'}$ が存在することを示せばよい。

各 $x\in U\cap(g\circ f)^{-1}(U'')$ に対し $f(x)\in f(U)\cap g^{-1}(U'')\subset B'$ の開近傍 U' で ξ' が局所自明化

$$\varphi' : (p')^{-1}(U')\longrightarrow U'\times F$$

を持つものを考える。$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ が束写像だから,

$$\begin{aligned}L^{\boldsymbol{f}}_{UU'} &: U\cap f^{-1}(U')\longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)\\ L^{\boldsymbol{g}}_{U'U''} &: U'\cap g^{-1}(U'')\longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)\end{aligned}$$

は, G を factor する。このとき

$$\bar{L}^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{x} = \bar{L}^{\boldsymbol{g}}_{U'U''}|_{f(U)\cap U'\cap g^{-1}(U'')}\circ\bar{L}^{\boldsymbol{f}}_{UU'}|_{U\cap f^{-1}(U'\cap g^{-1}(U''))}$$

は図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U\cap f^{-1}(U'\cap g^{-1}(U'')) \arrow[ul, dotted, "\exists\bar{L}^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{x}"] \arrow[ur, "L^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU''}"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする。これらを合わせて求める写像 $\bar{L}^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{UU''}$ を得る。

解答例 (4.1.15)**.** $\tilde{f}$ がファイバーを保ち各ファイバー上で同相写像になる写像だから, $\tilde{f}^{-1}$ もファイバーを保つ写像であり, 各ファイバー上で同相写像になる。構造群についての条件を考えよう。$\boldsymbol{f} = (\tilde{f}, 1_B)$ とおくと, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\lambda \cap V_\mu \arrow[ul, dotted, "\exists \bar{L}^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}"] \arrow[ur, "L^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで, $\boldsymbol{f}^{-1} = (\tilde{f}^{-1}, 1_B)$ について

$$L^{\boldsymbol{f}^{-1}}_{V_\mu U_\lambda} = \nu \circ L^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}$$

となることは, その定義からすぐ分かる。よって

$$\bar{L}^{\boldsymbol{f}^{-1}}(V_\mu U_\lambda) = \nu \circ \bar{L}^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}$$

とおけば, これが求める図式を可換にし, $\boldsymbol{f}^{-1}$ が束写像であることが分かった。

解答例 (4.1.18)**.** Möbious の帯を M_2 と同じように切り開いたときに, M_0 になるように貼り合せようとすると, 元と異なる点と貼り合せないといけなくなるからである。

解答例 (4.1.19)**.** 例 4.1.17 に従って, M_2 と M_0 をそれぞれ次のように 2 つの閉集合に分割する:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x, y, z) \in M_2 \,|\, y \geq 0\} \\
E_2 &= \{(x, y, z) \in M_2 \,|\, y \leq 0\} \\
E_1' &= \{(x, y, z) \in M_0 \,|\, y \geq 0\} \\
E_2' &= \{(x, y, z) \in M_0 \,|\, y \leq 0\}
\end{aligned}$$

写像

$$f_1 : E_1 \longrightarrow E_1'$$

を定義するために $(x, y, z) \in E_1$ を取ると, $y \geq 0$ より $\varphi \in [0, \pi]$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ により

$$\begin{aligned}
x &= (2 + t\cos\varphi)\cos\varphi \\
y &= (2 + t\cos\varphi)\sin\varphi \\
z &= t\sin\varphi
\end{aligned}$$

と表せる。これから $z \neq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{z}{|z|}\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2} \\
\cos\varphi &= \frac{|z|(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{z\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}} \\
\sin\varphi &= \frac{|z|}{\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}}
\end{aligned}
$$

と表せることが分かる。これを用いて

$$
f_1(x,y,z) = \begin{cases}
\left(\frac{|z|(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{z\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}}, \frac{|z|}{\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}}, \frac{z}{|z|}\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}, \right), & z \neq 0 \\
(2,0,x-2), & \varphi = 0 \\
(-2,0,x+2), & \varphi = \pi \\
(x,y,z), & t = 0
\end{cases}
$$

と定義すればよい。f_2 も同様であり, 省略する。

また, これらの逆写像を構成するのは簡単である。

解答例 (4.1.20)**.** 問い 4.1.19 の解答例から想像が付くように, $M_{2n} \cong M_0$ を示すためには, S^1 を $2n$ 等分し, それに合せて全空間 M_{2n} と M_0 を分割し, 写像を構成すればよい。$M_{2n+1} \cong M_1$ の場合は, S^1 を $(2n+1)$ 等分すればよい。詳細は省略する。

解答例 (4.2.4)**.** 複素数を用い $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ とみなす。それに合せて, $M_1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ とみなす。すると

$$
\varphi_n^*(M_1) = \left\{(z,(z',t)) \in S^1 \times M_1 \,\middle|\, z^n = z'\right\}
$$

である。S^1 を $[0,2\pi]$ の n 等分に従って分割したものを

$$
S^1 = S_0^1 \cdots S_{n-1}^1
$$

とすると, 各 S_i^1 上では, 丁度ファイバーが π だけ捻られている。よって全体では $n\pi$ だけ捻られ, M_n と同型なファイバー束になっていることが分かる。

具体的に同相写像を作るためには, M_n も n 等分すればよいが, 具体的な写像の記述は省略する。

解答例 (4.2.8)**.** 定義より

$$\begin{aligned}(f\circ g)^*(E) &= \{(y,e)\in Y\times E \mid (f\circ g)(y)=p(e)\}\\ g^*(f^*(E)) &= \{(y,(x,e))\in Y\times f^*(E) \mid g(y)=x\}\\ &= \{(y,x,e)\in Y\times X\times E \mid g(y)=x, f(x)=p(e)\}\\ &= \{(y,g(y),e) \mid f(g(y))=p(e)\}\end{aligned}$$

となる。このとき第 1 座標と第 3 座標を取り出す写像により, 写像

$$g^*(f^*(E)) \longrightarrow (f\circ g)^*(E)$$

を得るが, これがファイバー束の同型を与える。詳細は省略する。

解答例 (4.2.12)**.** 図式の可換性より, $w\in W$ に対し

$$f(\tilde{g}(w)) = g(\tilde{f}(w))$$

であるから, $(\tilde{g},\tilde{f}(w))\in X\times_Z Y$ となる。そこで

$$h : W \longrightarrow X\times_Z Y$$

を $h(w)=(\tilde{g}(w),\tilde{f}(w))$ で定義すると, これが求める写像となる。また, これが一意的であることは, $X\times_Z Y$ が直積 $X\times Y$ の部分集合であることから分かる。

解答例 (4.3.3)**.** これは, 命題 2.3.17 の証明と全く同じなので省略する。

解答例 (4.3.11)**.** $\widetilde{H}(e,0)=\tilde{f}_0(e)$ であることは, $\widetilde{H}$ の構成の最初の段階から分かる。また $E'_j - E'_{j-1}$ 上で

$$\begin{aligned}p(\widetilde{H}_j(e,t)) &= p(\varphi_\alpha^{-1}(H(p'(e),t),\bar{\varphi}_\alpha(\widetilde{H}_{j-1}(e,\tau_{j-1}(p'(e))))))\\ &= H(p'(e),t)\end{aligned}$$

となることから, もう一つの条件もみたされる。

解答例 (4.3.13)**.** $x\in A$ に対し $(f\cup g)(x)=f(x)$, $x\in B$ に対し $(f\cup g)(x)=g(x)$ と定義する。条件 $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$ より, f と g を拡張する写像

$$f\cup g : A\cup B \longrightarrow Y$$

が一意的に定義された。連続性を確かめるために, 閉集合 $F\subset Y$ を取ると,

$$(f\cup g)^{-1}(F) = f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F)$$

であり, f と g が連続であることより, $f^{-1}(F)$ と $g^{-1}(F)$ は, それぞれ A と B の閉集合である。A, B が X の閉集合であることから, これらは X の閉集合でもあり, $(f \cup g)^{-1}(F)$ は X の閉集合となる。

解答例 (4.3.19)**.** 定理 4.3.16 の仮定の下で, 図式

$$\begin{tikzcd}
E' \times \{0\} \arrow[rr, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
E' \times [0,1] \arrow[r, "p' \times 1_{[0,1]}"'] \arrow[urr, dotted] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & Y
\end{tikzcd}$$

を考える。系 4.3.18 より, 上下の三角形を可換にする写像

$$\widetilde{H} : E' \times [0,1] \longrightarrow E$$

が存在する。下の三角形を描き直すと

$$\begin{tikzcd}
E' \times [0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p' \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & Y
\end{tikzcd}$$

となる。また上の三角形の可換性より,

$$\widetilde{H}|_{E' \times 0} = \tilde{f}_0$$

となる。これで定理 4.3.7 の主張が証明された。

解答例 (4.4.2)**.** $C \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合のとき, $x_0 \in C$ をとり,

$$H : C \times [0,1] \longrightarrow C$$

を

$$H(x,t) = (1-t)x + tx_0$$

で定義する。C が凸集合であることから, 全ての $x \in C$ と $t \in [0,1]$ に対し $H(x,t) \in C$ となる。また, 全ての $x \in C$ に対し

$$H(x,1) = x_0$$

であるから, H は C の x_0 への contraction である。

解答例 (4.4.9)**.** ホモトピー (contraction) $H : CX \times [0,1] \to CX$ を

$$H([x,t],s) = [x,(1-s)t+s]$$

で定義すればよい。

解答例 (4.4.10)**.** 写像 $p : S^{n-1} \times [0,1] \to D^n$ を $p(x,t) = (1-t)x$ で定義する。$p(S^{n-1} \times \{1\}) = \{0\}$ となるので, 連続写像

$$\bar{p} : CS^{n-1} \longrightarrow D^n$$

が誘導される。これは全単射である。CS^{n-1} はコンパクト空間の商空間なのでコンパクト。D^n が Hausdorff なので, $\bar{p}$ は同相写像になる。

解答例 (4.5.3)**.** CW 複体のことが説明してあるトポロジーの教科書にはよく書かれている例であるので, 簡単に説明する。

まず

$$\begin{aligned} e_+^k &= \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \,|\, x_k > 0, x_{k+1} = \cdots = x_n =\} \\ e_-^k &= \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \,|\, x_k < 0, x_{k+1} = \cdots = x_n =\} \end{aligned}$$

と定義すると

$$S^n = e_+^0 \cup e_-^0 \cup \cdots \cup e_+^n \cup e_-^n$$

と共通部分の無い和集合に分割される。

各 k について, 写像 $\varphi_\pm^k : D^k \to S^n$ を

$$\varphi_\pm^k(t_1,\dots,t_k) = \left(t_1,\dots,t_k,\pm\sqrt{1-\sum_{i=1}^k t_i^2}\right)$$

と定義すると, これが $e_\pm^k$ の特性写像になる。

解答例 (4.5.6)**.** $x = \boldsymbol{e}_n = (0,\dots,0,1)$ とし, 写像 $\sigma : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{\boldsymbol{e}_n\}$ を, $\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\sigma(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{s}\|^2+1}\left(s_1,\dots,s_n,\|\boldsymbol{s}\|^2-1\right)$$

で定める。その逆写像は, $\boldsymbol{t} = (t_0,\dots,t_n) \in S^n \setminus \{\boldsymbol{e}_n\}$ に対し,

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{t}) = \left(\frac{t_0}{1-t_n},\dots,\frac{t_{n-1}}{1-t_n}\right)$$

で与えられる。

x が他の点の場合は, S^n を $\mathrm{SO}(n)$ の作用で回転させればよい。

解答例 (4.5.15)**.** 胞体分割と特性写像は X のものをそのまま使えばよい。胞体分割の条件は, 骨格を用いたものだったので, $X^{(n)}$ でもそのまま成り立つ。$X^{(n)}$ は Hausdorff 空間の部分空間として Hausdorff である。よって, 条件 (C) と (W) を確かめればよい。

任意の胞体 e_λ に対し, $\overline{e}_\lambda$ と交わる X の胞体が有限個なので, 当然 $X^{(n)}$ と交わる胞体は有限個である。よって閉包有限性が成り立つ。

$A \subset X^{(n)}$ をとり, 任意の $X^{(n)}$ の胞体 e_λ に対し, $A \cap \overline{e}_\lambda$ が $\overline{e}_\lambda$ の閉集合であると仮定する。ここで, $\overline{e}_\lambda$ は $X^{(n)}$ の中での閉包であるが, 問い 4.5.16 より $X^{(n)}$ は閉集合なので, これは X の中での閉包と一致する。また, $X^{(n)}$ に入らない胞体 e_μ については, 胞体分割の条件から, $A \cap \overline{e}_\mu = \emptyset$ である。以上から, A は X の閉集合であることが分かり, 特に $X^{(n)}$ の閉集合である。

解答例 (4.5.16)**.** 条件 (W) より任意の X の胞体 e_λ に対し, $X^{(n)} \cap \overline{e}_\lambda$ が $\overline{e}_\lambda$ の閉集合であることを示せばよいが, 胞体複体の条件から, $X^{(n)} \cap \overline{e}_\lambda$ は, $\overline{e}_\lambda$ か ∂e_λ か $\emptyset$ のいづれかである。よって閉集合である。

解答例 (4.5.19)**.** 閉包有限性は当然成り立っているので, 条件 (W) を示せばよい。任意の $X^{(n)}$ の胞体 e_λ に対し, $A \cap \overline{e}_\lambda$ が $\overline{e}_\lambda$ の閉集合であると仮定する。

X は Hausdorff なので, A がコンパクトであることを示せばよい。これは, 各 $A \cap \overline{e}_\lambda$ がコンパクト集合 $\overline{e}_\lambda$ の閉部分集合なのでコンパクトであること A がその有限個の和集合であることから分かる。

解答例 (4.6.3)**.** X が弧状連結であるとする。写像 $f, g : S^0 \to X$ に対し, X 内の道

$$\ell_\pm : [0,1] \longrightarrow X$$

で $\ell_\pm(0) = f(\pm 1)$, $\ell_\pm(1) = g(\pm 1)$ となるものが存在する。このとき, ホモトピー

$$H : S^0 \times [0,1] \longrightarrow X$$

を

$$H(\pm 1, t) = \ell_\pm(t)$$

と定義すれば, これが f と g の間のホモトピーを与えている。。

解答例 (4.6.8)**.** 写像

$$\tilde{p} : S^n \times [0,1] \longrightarrow D^{n+1}$$

を

$$\tilde{p}(x,t) = tx + (1-t)\boldsymbol{e}_0$$

で定義する。$\tilde{p}(S^n \times \{0\} \cup \{\boldsymbol{e}_0\} \times [0,1]) = \boldsymbol{e}_0$ はすぐ分かるので, 連続写像

$$\tilde{p} : S^n \times [0,1]/S^n \times \{0\} \cup \{\boldsymbol{e}_0\} \times [0,1] \longrightarrow D^{n+1}$$

が誘導される。全単射であることも簡単に確かめられ, 定義域がコンパクトで値域が Hausdorff なので, $\tilde{p}$ は同相写像になる。

次に, 命題 4.6.7 の (2) と (3) が同値であることを示そう。

<u>(2) ⇒ (3)</u> $k \leq n$ に対し, 連続写像 $f : S^k \to X$ を考える。X が弧状連結であることから, $f(e_0)$ と x_0 を結ぶ X 内の道 $\ell : [0,1] \to X$ が存在する。また, $S^k_+ = \left\{(x_0,\ldots,x_k) \in S^k \,\middle|\, x_0 > 0\right\}$ とおくと, S^k_+ を e_0 にうつす同相 $\varphi : S^k/S^k_+ \xrightarrow{\cong} S^k$ がある。そこで, $\tilde{f} : S^k \to X$ を

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi([\boldsymbol{x}]), & x_0 \leq 0 \\ \ell(x_0), & x_0 \geq 0 \end{cases}$$

と定義する。これは基点を保つ写像であり, $[\tilde{f}] \in \pi_k(X, x_0)$ を定める。仮定より, これは定値写像と基点を保つホモトピーでホモトピックになる。そのホモトピーを H とすると, 写像

$$\widetilde{H} : (S^k \times [0,1])/(S^n \times \{1\} \cup \{e_0\} \times [0,1]) \longrightarrow X$$

が誘導される。同一視

$$(S^k \times [0,1])/(S^n \times \{1\} \cup \{e_0\} \times [0,1]) \cong D^{k+1}$$

により, これを写像 $\widetilde{H} : D^{k+1} \to X$ とみなす。

一方,「潰す面積を増やしていく」ことにより, f から $\tilde{f}$ への (基点を保たない) ホモトピー

$$G : S^k \times [0,1] \longrightarrow X$$

を作ることができる。そこで, $F : D^{k+1} \to X$ を

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} G\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, 2\|\boldsymbol{x}\|\right), & \|\boldsymbol{x}\| \geq \frac{1}{2} \\ \widetilde{H}(2\boldsymbol{x}), & \|\boldsymbol{x}\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

で定義すればよい。

(2) ⇒ (3) $\pi_k(X), x_0) = \{*\}$ を示すために, 基点を保つ写像 $f : S^k \to X$ を取る。仮定より, これは写像 $F : D^{k+1} \to X$ に拡張できる。同一視

$$(S^k \times [0,1])/(S^n \times \{1\} \cup \{e_0\} \times [0,1]) \cong D^{k+1}$$

を用いると, 写像

$$S^k \times [0,1] \longrightarrow (S^k \times [0,1])/(S^n \times \{1\} \cup \{e_0\} \times [0,1]) \cong D^{k+1} \xrightarrow{F} X$$

を得る。これは f から定値写像への基点を保つホモトピーとなっている。

解答例 (4.6.10)**.** ホモトピー $H : CX \times [0,1] \to CX$ を

$$H([x,s],t) = [x, t + (1-t)s]$$

で定義すれば, これは well-defined であり, 恒等写像から基点への定値への基点を保つホモトピーになっている。

解答例 (4.6.11)**.** X が単連結であると仮定する。$\pi_1(X, x_0)$ が自明であることを示すために, ループ $\ell : [0,1] \to X$ を取る。基点への定値写像 $c_0 : [0,1] \to X$ も x_0 を基点とするループだから, 単連結という仮定から, $\ell \simeq c_0$ を得る。よって $\pi_1(X, x_0)$ は自明である。

解答例 (4.6.14)**.** τ が全単射であることは, 関数 $\tan x$ の性質から分かる。$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ は Hausdorff である。一方, $[0,1]^n/\partial[0,1]^n$ はコンパクト空間の商空間だから, 補題 3.6.10 よりコンパクトである。よって τ が連続であることを示せばよい。補題 3.6.14 より, 合成

$$[0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n/\partial[0,1]^n \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

が連続であることを示せばよいが, これは

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

であることから分かる。

解答例 (4.6.26)**.** ホモトピー群の演算は, 最後の座標を用いているので, 基本群のときに使ったホモトピーを最後の座標に用いるだけである。

解答例 (4.7.2)**.** $X^{(0)}$ の各点が $X^{(0)}$ の中で開かつ閉であることを示せばよい。X は Hausdorff なので, 1 点は閉集合である。また, 任意の 0 胞体 $e^0 \subset X^{(0)}$ について,

$\bar{e^0} = e^0$ であり, $x \in X^{(0)}$ に対し $X \setminus \{x\}$ との共通部分は, e^0 または空集合である。よって $X \setminus \{x\}$ は閉集合である。

解答例 (4.8.2)**.** 定義通りに確かめるだけである。準同型であることを示すためには, 補題 4.6.24 によるホモトピー群の演算の表示を用いる。$[\ell], [\ell'] \in \pi_n(X)$ に対し, $f_*([\ell] + [\ell']) = f_*([\ell + \ell']) = [f \circ (\ell + \ell')]$ であるが,

$$\begin{aligned} f \circ (\ell + \ell')(t_1, \ldots, t_n) &= f((\ell + \ell')(t_1, \ldots, t_n)) \\ &= \begin{cases} f(\ell(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n)), & 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ g(\ell(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1)), & \frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \end{cases} \\ &= (f \circ \ell + f \circ \ell')(t_1, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

となり,

$$f_*([\ell] + [\ell']) = f_*([\ell]) + f_*([\ell'])$$

を得る。

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ や $(1_X)_* = 1_{\pi_n(X)}$ は, 写像の合成の性質から分かる。

解答例 (4.8.8)**.** $[f] \in \pi_n(B)$ に対し, $\partial([f])$ は, 図式

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times \{0\} \arrow[r, "*"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ S^{n-1} \times [0,1] \arrow[r, "F = f \circ \pi"'] \arrow[ur, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする写像 $\widetilde{F}$ を用いて, $\partial([f]) = [\widetilde{F}|_{S^{n-1} \times \{0\}}]$ で定義されていた。ここで, $\pi : S^{n-1} \times [0,1] \to D^n$ は, 定義 4.8.7 で用いた写像である。$[g] \in \pi_n(B)$ に対し, $G = g \circ \pi$ とおき, そのリフトを $\widetilde{G}$ とする。

$f \simeq g$ とし, その (基点を保つ) ホモトピーを $H : S^n \times [0,1] \to B$ とする。この H も $H : D^n \times [0,1] \to B$ で $H(\partial D^n \times [0,1]) = *$ である写像とみなす。

$$K = [0,1] \times \partial[0,1] \cup \{0\} \times [0,1]$$

とおき, 写像 $h : S^{n-1} \times K \to E$ を

$$h(x, s, t) = \begin{cases} *, & s = 0 \\ \widetilde{F}(x, s), & t = 0 \\ \widetilde{G}(x, s), & t = 1 \end{cases}$$

で定義すると, 図式

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1}\times K \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
S^{n-1}\times[0,1]\times[0,1] \arrow[r, "H\circ(\pi\times 1_{[0,1]})"'] \arrow[ur, dotted, "\exists\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

の外側の四角は可換になる。ここで, 定理 5.4.7 の証明で用いた対の同相 $([0,1]\times[0,1],K)\cong([0,1]\times[0,1],[0,1]\times\{0\})$ により, この図式を CHP が使える形に直すことができる。得られた写像を $\widetilde{H}:S^{n-1}\times[0,1]\times[0,1]\to E$ とすると, その制限 $\widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{1\}\times[0,1]}$ が求めるホモトピーになっている。

解答例 (4.8.13)**.** 唯一つに定まる写像 $H\to 0$ を t と表そう。すると, $\operatorname{Ker} t=H$ である。よって, $G\xrightarrow{f}H\xrightarrow{t}0$ が完全であることは, $\operatorname{Im} f=H$ と同値であり, これは f が全射であることと同値である。

解答例 (4.8.15)**.** 基本的なアイデアは, 第 2 章で行なった, 道のリフトによるファイバーの間の点の対応の構成を使うこと, である。

まず, 写像 $\partial:\pi_1(B)\to\pi_0(G)$ を次のように定義する。$[\ell]\in\pi_1(B)$ のリフト $\tilde{\ell}:[0,1]\to E$ で $\tilde{\ell}(1)=*$ であるものを取る。このとき, $\tilde{\ell}(0)\in G$ の属する G の弧状連結成分を $\partial([\ell])$ と定義する。

まず, この写像が準同型であることを示す。もう一つ $[\ell']\in\pi_1(B)$ を取り, そのリフトを $\tilde{\ell}'$ とする。ここで, $\ell'':[0,1]\to E$ を G の作用を用いて

$$\ell''(t)=\tilde{\ell}(t)\tilde{\ell}'(0)$$

で定義する。G を $*\in B$ 上のファイバーと同一視したとき, その包含 $G\hookrightarrow E$ は基点を保つ写像であり, $\tilde{\ell}(1)=*$ は G の単位元と同一視される。このことから, ℓ'' は ℓ の $\tilde{\ell}(1)$ を終点とするリフトであることが分かる。そして $\ell''*\tilde{\ell}'$ は $*$ を終点とする $\ell*\ell'$ のリフトになる。

$$(\ell''*\tilde{\ell}')(0)=\ell''(0)=\tilde{\ell}(0)\tilde{\ell}'(0)$$

より, $\partial([\ell]*[\ell'])=\partial([\ell])\partial([\ell'])$ となる。完全性は, 道のリフトの性質からすぐに分かる。

E が弧状連結なとき, G を $*\in B$ 上のファイバーと同一視すると, 単位元 $e\in G$ と $g\in G$ を結ぶ E 内の道 ℓ が存在する。このとき $p\circ\ell$ は B のループであり, $\partial([p\circ\ell])=g$ となる。よって ∂ は全射になる。

解答例 (4.8.16)**.** 一般には, $\pi_0(F)$ も $\pi_0(E)$ も $\pi_0(B)$ も群にはならないが, 基点の連結成分という特別が元がある。すなわち, 基点付き集合である。また, $F \to E$ と $E \to B$ から誘導された写像は, 基点を保つ写像になっている。

一般に, 基点付き集合の間の基点を保つ写像

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

に対し, $\operatorname{Im} f = g^{-1}(*)$ が成り立つとき, この列が**完全**であるということにすると, 問いの列は基点付き集合の完全列になっている。

解答例 (4.9.3)**.** $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を X の開被覆とする。A を, $A \cap U_\lambda$ が U_λ で閉集合であるような X の部分集合とする。

このとき, $(X \setminus A) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合であるが, U_λ が開集合であるから, これは X の開集合でもある。よって

$$X \setminus A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A) \cap U_\lambda$$

は X の開集合である。

解答例 (4.9.4)**.** $X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ を X の閉被覆とする。A を各 $A \cap B_i$ が B_i で閉集合である X の部分集合とする。B_i が X の閉集合であるから, $A \cap B_i$ は X の閉集合でもある。よって,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$$

は X の閉集合である。

解答例 (4.9.7)**.** 各 $i = 0, \ldots, n$ に対し $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の開集合 U_i を

$$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

で定義する。U_i 上の $p_n : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の自明化を構成しよう。

$$U_{i,+} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_i > 0\}$$
$$U_{i,-} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_i < 0\}$$

とおくと,

$$p_n^{-1}(U_i) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_i \neq 0\} = U_{i,+} \cup U_{i,-}$$

となる。よって, $\varphi_i : p_n^{-1}(U_i) \to U_i \times \{\pm 1\}$ を

$$\varphi_i(x_0, \ldots, x_n) = \left([x_0, \ldots, x_n], \tfrac{x_i}{|x_i|}\right)$$

で定義すると, これは同相写像になり, p_n は $C_2 = \{\pm 1\}$ をファイバーとするファイバー束であることが分かる。

構造群が $C_2 = \{\pm 1\}$ であり, 座標変換が C_2 の作用で与えられていることは, この局所自明化写像を用いて計算すれば分かるが, その計算は省略する。

解答例 (4.9.14)**.** 問いの写像を $\varphi : G \times_H (H/K) \to G/K$ とする。写像 $\psi : G/K \to G \times_H (H/K)$ を

$$\psi(gK) = [(g, eK)]$$

で定義する。まず well-defined であることを確かめる。$gK = g'K$ と仮定すると, $gk = g'$ となる $k \in K$ が存在する。このとき, 同値関係の定義から

$$[(g, eK)] = [(g'k, eK)] = [(g', keK)] = [(g', eK)]$$

となるので, 代表元の取り方に依らず定義される。これが φ の逆写像であることは, すぐに分かる。

射影 $p_1 : G \times_H (H/K) \to G/H$ と $p_2 : G/K \to G/H$ について

$$\begin{aligned}(p_2 \circ \varphi)(g, hK) &= p_2(ghK) \\ &= ghH \\ &= gH \\ &= p_1(g, hK)\end{aligned}$$

であるから, 問いの図式は可換である。

解答例 (4.9.15)**.** $0 \to G$ を i, $G \to 0$ を t とする。$0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{t} 0$ が完全ならば, 問い 4.8.13 より i は全射である。すなわち $G = 0$ である。

解答例 (4.10.2)**.** 問い 2.1.5 で, $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ が被覆空間であることは示してある。その局所自明化を用いて, 主 $\mathbb{Z}$ 束になっていることを確かめるのはそれほど難しくない。

あるいは, 定理 3.7.1 を用いることもできる。$\mathbb{R}$ を加法により位相群とみなしたとき, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ はその部分群である。このとき, $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ を

$$\varphi([t]) = e^{2\pi i t}$$

で定義すると, これは同相写像になる。$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の離散部分群なので, 射影 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が局所切断を持つことを示すのは簡単である。以上から, 定理 3.7.1 により, $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ は主 $\mathbb{Z}$ 束となることがわかる。

解答例 (4.10.10)**.** 右辺の空間を仮に $J(X_0,\dots,X_n)$ と表そう。n に関する帰納法で, 同相写像

$$\varphi_n : X_0 * \cdots * X_n \longrightarrow J(X_0,\dots,X_n)$$

を構成する。$n = 0$ のときは恒等写像でよい。$n = k$ まで構成できたとする。$X_0 * \cdots * X_k * X_{k+1}$ は $(X_0 * \cdots * X_k) \times [0,1] \times X_{k+1}$ の商空間であるが, φ_k を用いて $J(X_0,\dots,X_k) \times [0,1] \times X_{k+1}$ の商空間, つまり $X_0 \times \cdots \times X_k \times \Delta^k \times [0,1] \times X_{k+1}$ の商空間とみなすことができる。そこで, 写像 $\psi_{k+1} : J(X_0,\dots,X_k) * X_{k+1} \to J(X_0,\dots,X_{k+1})$ を

$$\psi_{k+1}([[x_0,\dots,x_k,s_0,\dots,s_k],t,x_{k+1}]) = [x_0,\dots,x_{k+1},ts_0,\dots,ts_k,1-t]$$

で定義する。これは同相写像になるため, 合成

$$X_0 * X_1 * \cdots * X_k * X_{k+1} \xrightarrow{\varphi_k * 1_{X_{k+1}}} J(X_0,\dots,X_k) * X_{k+1} \xrightarrow{\psi_{k+1}} J(X_0,\dots,X_{k+1})$$

を φ_{k+1} ととればよい。

この構成で本質的に用いているのは, $\Delta^k * \Delta^0 \cong \Delta^{k+1}$ という同相であることに注意する。

解答例 (4.10.19)**.** 確かめるべきは, 最後の条件, すなわち EG が $\{E_nG\}_{n=1,2,\dots}$ による弱位相を持つこと, である。

より一般に, 単体的空間 X_* に対し,

$$|X_*|^{(n)} = \left\{[(x,\boldsymbol{t})] \in |X_*| \,\middle|\, x \in X_i, \boldsymbol{t} \in \Delta^i \ 0 \le i \le n\right\}$$

と定義するとき, $|X_*|$ が $\{|X_*|^{(n)}\}_{n=0,1,\dots}$ に関し弱位相を持つことを示せばよい。これは, $|X_*|$ の位相が, $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$ の商空間としての等化位相で与えられていることから分かる。

解答例 (4.11.9)**.** ℓ と m を $\ell(0) = m(0) = x_0$ である B の道とし, $\ell(1) \in U$ と $m(1) \in V$ となる $U, V \in \mathcal{U}$ をとる。$x \in U_{[\ell]} \cap V_{[m]}$ とすると, $u : [0,1] \to U$ と $v : [0,1] \to V$ を用いて

$$x = [\ell * u] = [m * v]$$

と表せる。よって $u(1) = v(1) \in U \cap V$ となる。

B が局所弧状連結であることから, $u(1) = v(1)$ の弧状連結な近傍 W で $W \subset U \cap V$ であるものが取れる。U と V の中のループが X の中で可縮なことから, W の中のループも X の中で可縮である。すなわち $W \in \mathcal{U}$ である。$s \ge s_0$ のとき

$u(s) \in W$ となる s_0 を選び, ℓ に u を $[0, s_0]$ まで制限した道を繋いでできる道を ω とすると, $x \in W_{[\omega]}$ となる。

任意の $y \in W_{[\omega]}$ に対し, $y = [\omega * w]$ となる $w : [0,1] \to W$ が存在するが, $W \subset U$ より, $y \in U_{[\ell]}$ である。また, $\ell * u \simeq m * v$ より, $m * v$ に ℓ を $[s_0, 1]$ に制限した道の逆を付け加えた, 更にそれに w を付け加えた道は, $\omega * w$ とホモトピックである。よって $y \in V_{[m]}$ でもある。以上より, $W_{[\omega]} \subset U_{[\ell]} \cap V_{[m]}$ である。

B.5　第 5 章 問いの解答例

解答例 (5.3.4)**.** まず ν の連続性についてであるが, ν は, $\tilde{\nu}(\ell)(t) = \ell(1-t)$ で定義される写像

$$\tilde{\nu} : \mathrm{Map}([0,1], X) \longrightarrow \mathrm{Map}([0,1], X)$$

の制限である。よって $\tilde{\nu}$ が連続であることを示せばよい。

これを直接コンパクト開位相の定義を用いて示してもよいが, ここでは定理 3.4.10 を使う。$[0,1]$ はコンパクトなので, 写像の合成で得られる写像

$$\mu : \mathrm{Map}([0,1], X) \times \mathrm{Map}([0,1], [0,1]) \longrightarrow \mathrm{Map}([0,1], X)$$

は連続である。$\tau(t) = 1 - t$ により $\tau \in \mathrm{Map}([0,1], [0,1])$ を定めると, $\tilde{\nu}$ は μ の $\mathrm{Map}([0,1], X) \times \{\tau\}$ への制限と同一視される。よって連続になる。

次に, 命題 5.3.3 の残りの 3 つのホモトピー

$$\begin{aligned} \mu \circ (\nu \times 1_{\Omega X}) &\simeq c_{x_0} \\ \mu \circ (1_{\Omega X} \times e) &\simeq 1_{\Omega X} \\ \mu \circ (e \times 1_{\Omega X}) &\simeq 1_{\Omega X} \end{aligned}$$

を考える。1 番目は命題 5.3.3 で証明したもので, $1_{\Omega X}$ と ν が入れ替わっただけなので省略する。残り 2 つも同じなので, 2 番目のホモトピーだけ作る。使うのは, 命題 2.3.12 のホモトピーである。具体的には, 問い 2.3.13 で与えられている

$$H(\ell)(t,s) = \begin{cases} \ell(\frac{2t}{s+1}), & 0 \le t \le \frac{s+1}{2} \\ x_0, & \frac{s+1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

を用いる。$\widetilde{H}(\ell, s)(t) = H(\ell)(t,s)$ と定義することにより, 写像

$$\widetilde{H} : \Omega X \times [0,1] \longrightarrow \Omega X$$

を得る。$\widetilde{H}(0) = (\mu \circ (1_{\Omega X} \times e))(\ell)$ であり $\widetilde{H}(1) = \ell$ なので, これが連続ならば, 求めるホモトピーになる。連続性は, $\widetilde{H}$ を次の合成に分割することで分かる。

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \times [0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "\Delta \times 1_{[0,1]}"'] & \Omega X \\
\Omega X \times \Omega X \times [0,1] \arrow[d, "1_{\Omega X} \times c_{x_0} \times 1_{[0,1]}"'] & \\
\Omega X \times \Omega X \times [0,1] \arrow[r, "\mu \times 1_{[0,1]}"] & \Omega X \times [0,1] \arrow[uu, "h"']
\end{tikzcd}$$

ここで, c_{x_0} は基点への定値ループ c_0 への定値写像であり, h は

$$h(\ell, s)(t) = \begin{cases} \ell(\frac{t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ \ell(\frac{t-s}{1-s}), & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定義される写像である。

解答例 (5.3.12)**.** モノイドになることは積と単位元の定義からすぐ確かめられるので, μ_M が連続であることを示せばよい。証明は, 補題 5.3.1 とほとんど同じである。補題 5.3.1 のように, $K \subset [0, \infty)$, $U \subset X$, $V \subset [0, \infty)$ に対し

$$\overline{W}(K, U, V) = (W(K, U) \times V) \cap \Omega_M X$$

とおく。$K = [a, b]$ と, 開集合 $U \subset X$ と $V \subset [0, \infty)$ を動かしたものが, $\Omega_M X$ の準基底となっている。

$$\mu_M^{-1}(\overline{W}([a,b], U, V)) = \{(\omega_1, \ell_1; \omega_2, \ell_2) \in \Omega_M X \times \Omega_M X \mid \bar{\mu}(\omega_1, \omega_1)([a,b]) \in U, \ell_1 + \ell_2 \in V\}$$

であるが, $[0, \infty)$ の和が連続であることより, ℓ_1 の $[0, \infty)$ での近傍 V_1 と ℓ_2 の $[0, \infty)$ での近傍 V_2 で $V_1 + V_2 \subset V$ となるものが取れる。

また, $\ell_1 \in [a, b]$ のとき, $\bar{\mu}(\omega_1, \omega_2)([a, b]) \subset U$ より, $\omega_1([s, \ell_1]) \subset U$ かつ $\omega_2([\ell_1, b]) \subset U$ である。このとき, $\overline{W}([a, \ell_1], U, V_1) \times \overline{W}([\ell_1, b], U, V_2)$ は $(\omega_1, \ell_1; \omega_2, \ell_2)$ の $\mu_M^{-1}(\overline{W}([a, b], U, V))$ での開近傍になっている。

$\ell_1 < a$ や $b < \ell_2$ の場合はもっと単純であるので省略する。

解答例 (5.3.15)**.** 恒等写像 $1_X : X \to X$ はホモトピー同値写像なので, 反射律をみたす。

$f : X \to Y$ がホモトピー同値写像のとき, そのホモトピー逆写像 g を 1 つ取ると, それは Y から X へのホモトピー同値写像である。よって $Y \simeq X$ であり, 対称律が成り立つ。

$f_1 : X \to Y$ と $f_2 : Y \to Z$ がホモトピー同値写像のとき, ぞれぞれのホモトピー逆写像 $g_1 : Y \to X$, $g_2 : Z \to Y$ を取ると, $g_1 \circ g_2$ が $f_2 \circ f_1$ のホモトピー逆写像になっている。よって, 推移律が成り立つ。

解答例 (5.3.16)**.** X が $x_0 \in X$ に可縮であるならば, 1_X から c_{x_0} へのホモトピー $H : X \times [0,1] \to X$ が存在する。$i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ を包含写像, $r : X \to \{x_0\}$ を x_0 に潰す写像とすると, $r \circ i = 1_{x_0}$ であり, H は 1_X から $i \circ r$ へのホモトピーである。よって $X \simeq \{x_0\}$ となる。

逆に X が 1 点 $\{a\}$ とホモトピー同値であるとする。ホモトピー同値写像を $f : \{a\} \to X$ とする。そのホモトピー同値写像は, 唯一つに定まる写像 $r : X \to \{a\}$ のはずである。1_X から $r \circ f$ へのホモトピー $H : X \times [0,1] \to X$ があるはずであるが, これは X の $\{f(a)\}$ への収縮写像になっている。

解答例 (5.4.11)**.** $p : E \to B$ と $p' : E' \to B$ がファイバーホモトピー同値であると仮定する。ファイバーを保つ写像

$$\begin{aligned} \tilde{f} &: E \longrightarrow E' \\ \tilde{g} &: E' \longrightarrow E \end{aligned}$$

と $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ から 1_E へのファイバーホモトピー $\widetilde{H}$, そして $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ から $1_{E'}$ へのファイバーホモトピー $\widetilde{G}$ が存在する。

$\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ はファイバーを保つ写像だから, 各 $x \in B$ に対し,

$$\begin{aligned} \tilde{f}|_{p^{-1}(x)} &: p^{-1}(x) \longrightarrow (p')^{-1}(x) \\ \tilde{g}|_{(p')^{-1}(x)} &: (p')^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x) \end{aligned}$$

を誘導する。

また, 可換図式

$$\begin{tikzcd} E \times [0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times [0,1] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & B \end{tikzcd}$$

より $\widetilde{H}$ は, ホモトピー

$$\widetilde{H}|_{p^{-1}(x)\times[0,1]} : p^{-1}(x) \times [0,1] \longrightarrow p^{-1}(x)$$

を誘導する。これは, $\tilde{g}|_{(p')^{-1}(x)} \circ \tilde{f}|_{p^{-1}(x)}$ から $1_{p^{-1}(x)}$ へのホモトピーである。同様に

$$\tilde{f}|_{p^{-1}(x)} \circ \tilde{g}|_{(p')^{-1}(x)} \simeq 1_{(p')^{-1}(x)}$$

も得られ, $p^{-1}(x) \simeq (p')^{-1}(x)$ が分かる。

解答例 (5.5.9)**.** 定理 5.5.2 より, $i : E \to E_p$ はファイバーを保つ写像であり, 図式

$$\begin{tikzcd} E_p \arrow[r, "r"] \arrow[d, "p_p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

はホモトピー可換である。p がファイブレーションなので, 命題 5.5.6 より, r とホモトピックな写像 $\tilde{r} : E_p \to E$ で図式を本当に可換にするものがとれる。よって $(1_B, \tilde{r})$ はファイバーを保つ写像であり, 合成 $i \circ \tilde{r}$ と $\tilde{r} \circ i$ は, 共にファイバーを保つ写像である。このとき, $i \circ \tilde{r} \simeq_B 1_{E_p}$ と $\tilde{r} \circ i \simeq_B 1_E$ を示せばよい。

まず, $r \simeq \tilde{r}$ より $i \circ r \simeq i \circ \tilde{r}$ である。この r から $\tilde{r}$ へのホモトピーは, 以下のようにして作られた。まず $F : E_p \times [0,1] \to B$ を

$$F(e, \omega, t) = \omega(t)$$

で定義すると, これは $p \circ r$ から p_p へのホモトピーを与える。特に, 図式

$$\begin{tikzcd} E_p \times \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ E_p \times [0,1] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\exists \widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

は可換である。この図式から CHP により得られる $\widetilde{F}$ が, r から $\tilde{r}$ へのホモトピーだった。よって, $i \circ \widetilde{F}$ が $i \circ r$ から $i \circ \tilde{r}$ へのホモトピーとなる。

一方, 定理 5.5.2 より, $i \circ r \simeq 1_{E_p}$ である。このホモトピー H は $h(\omega, t)(s) = \omega(ts)$ で与えられる h を用いて $H(e, \omega, t) = (e, h(\omega, t))$ で与えられていた。そこで, ホモ

トピー $G : E_p \times [0,1] \to E_p$ を

$$G(e,\omega,t) = \begin{cases} (i \circ \widetilde{F})(e,\omega,1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H(e,\omega,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

で定義すると, これは $i \circ \tilde{r}$ から 1_{E_p} へのホモトピーになる。また,

$$(p_p \circ G)(e,\omega,t) = \begin{cases} \omega(1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

である。一方

$$\left(\mathrm{pr}_1 \circ (p_p \times 1_{[0,1]})\right)(e,\omega,t) = p_p(e,\omega) = \omega(1)$$

である。よって, 命題 2.3.15 の証明で用いたホモトピーにより, 図式

$$\begin{tikzcd} E_p \times [0,1] \arrow[r, "G"] \arrow[d, "p_p \times 1_{[0,1]}"'] & E_p \arrow[d, "p_p"] \\ B \times [0,1] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & B \end{tikzcd}$$

はホモトピー可換になる。このホモトピーを $\widetilde{G}$ とすると,

$$\widetilde{G}(e,\omega,0,s) = \omega(1) = (p_p \circ i \circ \tilde{r})(e,\omega)$$
$$\widetilde{G}(e,\omega,1,s) = \omega(1) = (p_p \circ 1_{E_p})(e,\omega)$$

となり, 命題 5.5.7 の条件をみたすので, ファイバーホモトピーに取り替えることができる。

次に, $\tilde{r} \circ i \simeq r \circ i = 1_E$ のホモトピーについてであるが, このホモトピーは $\widetilde{F} \circ (i \times 1_{[0,1]})$ で与えられ, これがファイバーホモトピーになっていることはすぐに分かる。よって $\tilde{f} \circ i \simeq_B 1_E$ となり, 証明された。

実は, 1_{E_p} と $i \circ \tilde{r}$ の間のホモトピーは, $\widetilde{F}$ を用いて

$$G'(e,\omega,s) = (\widetilde{F}(e,\omega,s), h(\omega,s))$$

として直接作ることもできる。ただし,

$$h(\omega,s)(t) = \begin{cases} \omega(s), & 0 \le t \le s \\ \omega(t), & s \le t \le 1 \end{cases}$$

である。実際,

$$\begin{aligned}(p \circ \widetilde{F})(e,\omega,s) &= F(e,\omega,s) = \omega(s)\\ h(\omega,s)(0) &= \omega(s)\end{aligned}$$

より $G'(e,\omega,s) \in E_p$ であり,

$$\begin{aligned}(p_p \circ G')(e,\omega,s) &= h(\omega,s)(1) = \omega(1)\\ p_p(e,\omega,s) &= \omega(1)\end{aligned}$$

より G' はファイバーホモトピーである。更に,

$$\begin{aligned}G'(e,\omega,0) &= (\widetilde{F}(e,\omega,0), h(\omega,0))\\ &= (r(e,\omega),\omega\\ &= (e,\omega\\ G'(e,\omega,1) &= (\widetilde{F}(e,\omega,1), h(\omega,1))\\ &= (\tilde{r}(e,\omega), c_{\omega(1)})\\ &= i \circ \tilde{r}(e,\omega)\end{aligned}$$

であり, G' は 1_{E_p} から $i \circ \tilde{r}$ へのホモトピーである。これは, 2018 年度 4 年生だった田中頌悟君の解答である。

解答例 (5.6.3)**.** $f_*(\omega) = f \circ \omega$ で定義される写像

$$f_* : \mathrm{Map}([0,1],X) \longrightarrow \mathrm{Map}([0,1],Y)$$

が連続であることを示せばよい。コンパクト集合 $K \subset [0,1]$ と開集合 $U \subset Y$ に対し,

$$\begin{aligned}f_*^{-1}(W(K,U)) &= \{\omega \in \mathrm{Map}([0,1],X) \mid f \circ \omega \in W(K,U)\}\\ &= \{\omega \in \mathrm{Map}([0,1],X) \mid (f \circ \omega)(K) \subset U\}\\ &= \left\{\omega \in \mathrm{Map}([0,1],X) \,\middle|\, \omega(K) \subset f^{-1}(U)\right\}\\ &= W(K, f^{-1}(U))\end{aligned}$$

であり, f が連続だから $f^{-1}(U)$ は X の開集合である。よって f_* は連続になる。

ところで, この写像は,

$$\mathrm{Map}(X,Y) \times \mathrm{Map}([0,1],X) \longrightarrow \mathrm{Map}([0,1],Y)$$

の

$$\{f\} \times \Omega(X,x_0) \longrightarrow \Omega(Y,y_0)$$

への制限である。よって X が局所コンパクト Hausdorff ならば, 定理 3.4.10 より連続となる。しかしながら, 上記のように一般の X について f_* が連続であることを直接示すのは難しくない。

解答例 (5.7.8)**.** X と Y がコンパクト Hausdorff であるとする。このとき,

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

が同相写像であることを示す。定理 5.7.6 の証明の前半で, 逆写像 ad^{-1} は既に構成されている。よって ad と ad^{-1} が連続であることを示せばよい。そのためには, これらの写像空間の位相を知る必要がある。

まず $\mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$ の位相は, 包含

$$\mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \subset \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

による部分空間としての位相として定義されている。一方, $\mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z)$ の位相はちょっと面倒である。一般に, 定義 4.6.4 を拡張し, 位相空間対 (X, A), (Y, B) に対し,

$$\mathrm{Map}((X, A), (Y, B)) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset B\}$$

と定義し, $\mathrm{Map}(X, Y)$ の部分空間として位相を定める。$B = *$ のとき, A を潰す写像 $q : (X, A) \to (X/A, *)$ により, 全単射

$$q^* : \mathrm{Map}_*(X/A, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}((X, A), (Y, *))$$

が得られるが, X がコンパクト Hausdorff で A がその閉部分集合ならば, これは同相写像になる。実際, コンパクト部分集合 $K \subset X$ と開集合 $U \subset Y$ に対し, $q(K)$ はコンパクトになるが,

$$(q^*)^{-1}(W(K, U)) = W(q(K), U) \cap \mathrm{Map}_*(X/A, Y)$$

であるから q^* は連続である。また, コンパクト部分集合 $L \subset X/A$ について, $q^{-1}(L)$ もコンパクトになるが,

$$q^*(W(L, U)) = W(q^{-1}(K), U) \cap \mathrm{Map}((X, A), (Y, *))$$

であるから, q^* は開写像である。

問題の空間に戻ると, 今, 仮定より $X \times Y$ はコンパクトであり, X と Y が Hausdorff なので 1 点は閉集合, よって $X \vee Y$ は $X \times Y$ の閉部分集合となる。よってる。

$$q^* : \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}((X \times Y, X \vee Y), (Z, *))$$

は同相写像である。そして $\mathrm{Map}((X \times Y, X \vee Y), (Z, *))$ には, $\mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ の部分空間としての位相が入っている。

以上より, 問題の ad と ad^{-1} は,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} &: \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \\ \mathrm{ad}^{-1} &: \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \end{aligned}$$

の制限とみなしてよい。よってこの ad が連続かつ開写像であることを示せばよい。

まず ad が連続であることは, コンパクト集合 $K \subset X$, $L \subset Y$ と開集合 $U \subset Z$ に対し,

$$\mathrm{ad}^{-1}(W(K, W(L, U))) = W(K \times L, U)$$

であることから分かる。

ad が開写像であることは, ちょっと面倒である。証明のアイデアは, 補題 3.4.7 と少し似ている。コンパクト集合 $K \subset X \times Y$ と開集合 U を取る。$f \in W(K, U)$ に対し, $\mathrm{ad}(f)$ の $\mathrm{ad}(W(K, U))$ の中での開近傍を見付ければよい。$x \in K$ に対し,

$$x \in K \subset f^{-1}(U)$$

で, f が連続であることから, X の開集合 $V_{x,1}$ と Y の開集合 $V_{x,2}$ で

$$x \in V_{x,1} \times V_{x,2} \subset f^{-1}(U)$$

となるものが取れる。今, X と Y はコンパクト Hausdorff と仮定しているので正規であり,

$$\overline{V_{x,1}} \times \overline{V_{x,2}} \subset f^{-1}(U)$$

と仮定してよい。$\{V_{x,1} \times V_{x,2}\}_{x \in K}$ は K の開被覆であり, K がコンパクトだから, 有限個の点 $x_1, \ldots, x_n \in K$ を選び,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{V_{x_i,1} \times V_{x_i,2}$$

とできる。このとき

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} W\left(\overline{V_{x_i,1}} \times \overline{V_{x_i,2}}, U\right) \subset W(K, U)$$

となる。これから,

$$\mathrm{ad}(f) \in \mathrm{ad}\left(\bigcap_{i=1}^{n} W\left(\overline{V_{x_i,1}} \times \overline{V_{x_i,2}}, U\right)\right) \subset \mathrm{ad}(W(K, U))$$

となるが, ad が全単射であることから

$$\mathrm{ad}\left(\bigcap_{i=1}^{n} W\left(\overline{V_{x_i,1}} \times \overline{V_{x_i,2}}, U\right)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} W(\overline{V_{x_i,1}}, W(\overline{V_{x_i,2}}, U))$$

が分かり, $\mathrm{ad}(f)$ の $\mathrm{ad}(W(K,U))$ 内での開近傍 $\bigcap_{i=1}^{n} W(\overline{V_{x_i,1}}, W(\overline{V_{x_i,2}}, U))$ が取れることが示された。

解答例 (5.8.22)**.** 命題 5.8.21 の主張は間違いであった。正しい結論は以下のものである:

1. f_{-2} が全射で f_{-1} と f_1 が単射ならば, f_0 は単射になる。
2. f_2 が単射で f_{-1} と f_1 が全射ならば, f_0 は全射になる。

これを証明する。

A_i から A_{i+1} への写像を φ_i, B_i から B_{i+1} への写像を ψ_i とする。

f_{-2} が全射で f_{-1} と f_1 が単射であるとする。f_0 が単射であることを示すために, $x \in \mathrm{Ker}\, f_0$ を取る。左から 3 番目の四角の可換性より

$$f_1(\varphi_0(x)) = \psi_0(f_0(x)) = 0$$

となるが, f_1 が単射なので $\varphi_0(x) =$ である。完全性から $\varphi_{-1}(y) = x$ となる $y \in A_{-1}$ が存在する。左から 2 番目の四角の可換性より

$$\psi_{-1}(f_{-1}(y)) = f_0(\varphi_{-1}(y)) = f_0(x) = 0$$

となり, 完全性から $\psi_{-2}(z) = f_{-1}(y)$ となる $z \in B_2$ が取れる。f_{-2} が全射なので, $f_{-2}(w) = z$ となる $w \in A_{-2}$ が取れる。最も左の四角の可換性より,

$$\begin{aligned} f_{-1}(y - \varphi_{-2}(w)) &= f_{-1}(y) - f_{-1}(\varphi_{-2}(w)) \\ &= f_{-1}(y) - \psi_{-2}(f_{-2}(w)) \\ &= f_{-1}(y) - \psi_{-2}(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるが, f_{-1} が単射であることより, $y = \varphi_{-2}(w)$ となる。よって

$$x = \varphi_{-1}(y) = \varphi_{-2}(\varphi_{-1}(y)) = 0$$

となり, f_0 が単射であることが示された。

次に, f_2 が単射で f_{-1} と f_1 が全射であるとする。f_0 が全射であることを示すために, $x \in B_0$ を取る。f_1 が全射であるから, $f_1(y) = \psi_0(x)$ となる $y \in A_1$ が取れる。最も右の四角の可換性より

$$f_2(\varphi_1(y)) = \psi_1(f_1(y)) = \psi_1(\psi_0(x)) = 0$$

となるが, f_2 が単射であることから, $\varphi_1(y) = 0$ となる。完全性から, $\varphi_0(z) = y$ となる $z \in A_0$ が存在する。右から 2 番目の図式の可換性より

$$\begin{aligned}\psi_0(x - f_0(z)) &= \psi_0(x) - \psi_0(f_0(z)) \\ &= \psi_0(x) - f_1(\varphi_0(z)) \\ &= \psi_0(x) - f_1(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。完全性から $\psi_{-1}(w) = x - f_0(z)$ となる $w \in B_{-1}$ が存在する。f_{-1} が全射であることから, $f_{-1}(u) = w$ となる $u \in A_{-1}$ が存在する。このとき,

$$\begin{aligned}f_0(z + \varphi_0(u)) &= f_0(z) + f_0(\varphi_0(u)) \\ &= f_0(z) + \psi_{-1}(f_{-1}(u)) \\ &= f_0(z) + \psi_{-1}(w) \\ &= f_0(z) + (x - f_0(z)) \\ &= x\end{aligned}$$

となり, f_0 が全射であることが示された。

解答例 (5.8.23)**.** 射影 $p : (E, F) \to (B, *)$ から,

$$p_* : [(D^n, S^{n-1}), (E, F)]_* \longrightarrow [(D^n, S^{n-1}), (B, *)]_* = \pi_n(B)$$

が誘導される。ホモトピー群の演算の定義から, これは準同型である。よって, この写像が全単射であることを示せばよい。

全射を示すために, $f : (D^n, S^{n-1}) \to (B, *)$ を取る。問い 4.6.8 の同相から, 等化写像

$$\pi : S^{n-1} \times [0, 1] \longrightarrow D^n$$

で $\pi(S^{n-1} \times \{1\} \cup \{e_0\} \times [0, 1]) = \{e_0\}$ をみたすものがある。このとき, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times \{1\} \arrow[rr, "*"] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
S^{n-1} \times [0,1] \arrow[r, "\pi"] \arrow[urr, dotted, "\exists \tilde{f}"] & D^n \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

がある。ただし, $*: S^{n-1} \times \{1\} \to E$ は基点への定値写像である。基点付き CHP より, 図式の点線の写像 $\tilde{f}$ が存在する。このとき,

$$(p \circ \tilde{f})(S^{n-1} \times \{0\}) = f(\partial S^{n-1}) = *$$

であるから,

$$\tilde{f}(S^{n-1} \times \{0\}) \subset p^{-1}(*) = F$$

となる。また, $\tilde{f}(\{*\} \times [0,1]) = *$ だから, $\tilde{f}: D^n \to E$ とみなしてよい。このとき, S^{n-1} は $S^{n-1} \times \{0\}$ に対応するので, 基点を保つ写像

$$\tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (E, F)$$

を得る。図式の可換性から, $p_*([\tilde{f}]) = [f]$ となり, p_* が全射であることが示された。

p_* が単射であることを示すために, $p_*([f]) = 0$ と仮定する。全射を示したときに構成した f のリフトを $\tilde{f}$ とし, f から $*$ へのホモトピーを H とする。CHP を用いて H のリフトを作ることにより, $\tilde{f}$ と $*$ の間のホモトピー $\widetilde{H}$ を構成する。定理 5.4.7 の証明で用いた K を 90 度回転させた

$$K' = [0,1] \times \partial[0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$$

を用い, 写像

$$h: S^{n-1} \times K' \longrightarrow E$$

を

$$h(x,s,t) = \begin{cases} \tilde{f}(x,s), & t = 0 \\ *, & t = 0 \text{ または } s = 1 \end{cases}$$

で定義すると, 図式

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times K' \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
S^{n-1} \times [0,1] \times [0,1] \arrow[r, "\pi \times 1_{[0,1]}"] & D^n \times [0,1] \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

は可換になる。定理 5.4.7 の証明と同様に, 対の同相

$$([0,1] \times [0,1], K') \cong ([0,1] \times [0,1], [0,1] \times \{0\})$$

を構成すれば, この図式に CHP を用いてよいことが分かり, 図式を可換にする

$$\tilde{H}: S^{n-1} \times [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

を得る。問い 4.6.8 から, これは $\tilde{H} : D^n \times [0,1] \to E$ とみなしてよいことが分かり, 求めるホモトピーが構成されたことが分かる。

解答例 (5.8.25)**.** 系 5.8.24 の主張にはタイプミスがある。正しい主張は, 以下の通りである:

> ファイブレーション $p : E \to B$ と連続写像 $f : X \to E$ に対し, もし $p \circ f$ が定値写像とホモトピック (null homotopic) $f \simeq *$ ならば, f をホモトピーで変形しその像がファイバーへ入るようにできる。つまり次の図式がホモトピー可換になるような $g : X \to F$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d] \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\simeq *"'] & E \arrow[d, "p"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

これを証明する。$p \circ f \simeq *$ と仮定し, そのホモトピーを $H : X \times [0,1] \to B$ とすると, 図式

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

の外側の四角は可換になる。CHP より, 図式を可換にする $\widetilde{H}$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned} p(\widetilde{H}(x,1)) &= H(x,1) \\ &= * \end{aligned}$$

であり, $g = \widetilde{H}|_{X \times \{1\}}$ とおくと, $g : X \to p^{-1}(*) = F$ とみなしてよい。これが求める写像である。

解答例 (5.10.3)**.** 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f_*(i)"] \\ Y \arrow[r, "i_*(f)"] & X \cup_A Y \end{tikzcd}$$

が可換であることは, 元を写せば分かるので省略する。

写像 $i_*(f)$ がコファイブレーションであることを示す。可換図式

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "i_*(f)"] \arrow[d] & (X \cup_A Y) \times \{0\} \arrow[d, "g"] \\ Y \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Z \end{tikzcd}$$

が可換になる写像 g と H が与えられたとする。この図式にプッシュアウトの図式を繋げると, 可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[dd, hook] & A \times \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "f_{*(i)}"] \\ & Y \times \{0\} \arrow[r, "i_*(f)"] \arrow[d] & (X \cup_A Y) \times \{0\} \arrow[d, "g"] \\ A \times [0,1] \arrow[r, "f \times 1_{[0,1]}"] & Y \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Z \end{tikzcd}$$

を得る。i がコファイブレーションであることから, この外側の四角に HEP を用いて得られる写像を $G : X \times [0,1] \to Z$ とおく。そこで, $\widetilde{H} : (X \cup_A Y) \times [0,1] \to Z$ を

$$\widetilde{H}([u],t) = \begin{cases} G(u,t), & u \in X \\ H(u,t), & u \in Y \end{cases}$$

と定義する。$a \in A$ により $u = f(a)$ と表されているとき, G を定義する図式の可換性から

$$H(u,t) = H(f(a),t) = G(a,t)$$

となり, $\widetilde{H}$ が well-defined であることが分かる。また, HEP の条件をみたすホモトピーであることもすぐに確かめられる。

この証明は, 命題 5.4.2 の証明で「矢印の向きを逆にした」ものであることが分かる。

解答例 (5.10.12)**.** j が任意の空間 Z に対し HEP を持つことを示す。可換図式

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[rr, "j"] \arrow[dd, hook] & & \widetilde{C}_f \arrow[dl, hook] \arrow[dd, "\varphi"] \\
& \widetilde{C}_f \times [0,1] \arrow[dr, dotted, "\widetilde{H}"] & \\
Y \times [0,1] \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "H"] & & Z
\end{tikzcd} \tag{B.6}$$

が与えられたとする。点線の写像 $\widetilde{H}$ を構成したい。

$\widetilde{C}_f$ の定義から,

$$\widetilde{C}_f \times [0,1] = (Y \times [0,1] \amalg X \times [0,1] \times [0,1]) /_\sim$$

という形の商空間とみなしてよい。ただし $\sim$ は $x \in X$ と $t \in [0,1]$ に対し,

$$\begin{gathered}(f(x), t) \sim (x, 0, t) \\ (*, t) \sim *\end{gathered}$$

という関係で生成された同値関係である。

この同一視の下で $\widetilde{H} : \widetilde{C}_f \times [0,1] \to Z$ を

$$\widetilde{H}([u]) = \begin{cases} H(f(x), t-s), & \exists x \in X \text{ s.t. } u = (x,s,t) \text{ かつ } s \geq t \\ \varphi([(x, s-t)]), & \exists x \in X \text{ s.t. } u = (x,s,t) \text{ かつ } s \leq t \\ H(y,t), & \exists y \in Y \text{ s.t. } u = (y,t) \end{cases}$$

で定義する。1 番目と 2 番目で, $s = t$ のとき

$$H(f(x), 0) = \varphi(j(x)) = \varphi([(x,0)])$$

となり定義が一致する。1 番目と 3 番目も $s = 0$ のときに定義域が重複しているが, その値は一致している。更に, H も φ も基点を保つことから, $\{*\} \times [0,1]$ は $\{*\}$ にうつされている。よって $\widetilde{H}$ は well defined かつ連続である。

定義から, この写像は図式 (B.6) を可換にしている。

解答例 (5.10.23)**.** 命題 5.10.22 の主張は不正確である。正しくは以下の通り:

コファイブレーション $A \hookrightarrow X$ と連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 合成

$$A \hookrightarrow X \longrightarrow Y$$

が定値写像とホモトピックなら, 連続写像

$$\tilde{f} : X/A \longrightarrow Y$$

で次の図式をホモトピー可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "\simeq *"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\
X/A \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

これを証明する。

包含写像を $i : A \hookrightarrow X$ とおく。仮定より $f \circ i$ と定値写像 $*$ との間のホモトピー

$$H : A \times [0,1] \longrightarrow Y$$

が存在する。i がコファイブレーションであるから, 図式

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, "j"] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl, hook] \arrow[dd, "f"] \\
& X \times [0,1] \arrow[dr, dotted, "\exists \widetilde{H}"] & \\
A \times [0,1] \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "H"] & & Y
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\widetilde{H}$ が存在する。$\widetilde{H}(A \times \{1\}) = H(A \times \{1\}) = \{*\}$ だから, 写像 $\tilde{f} : X/A \to Y$ を

$$\tilde{f}([x]) = \widetilde{H}(x, 1)$$

で定義すると, これは well-defined かつ連続である。また $\widetilde{H}$ は, f と合成 $X \to X/A \xrightarrow{\tilde{f}}$ の間のホモトピーになるので, この $\tilde{f}$ が求める写像である。

解答例 (5.11.12)**.** 写像

$$\varphi^{(n)} : \mathrm{SP}^{n+1}(X \cup A \times [0,1]) \longrightarrow |B_*(SP^\infty(X), \mathrm{SP}^\infty(A)\,\mathrm{SP}^\infty(A))|$$

を以下のように定義する。$[u_1, \ldots, u_{n+1}] \in \mathrm{SP}^{n+1}(X \cup A \times [0,1])$ を取る。対称積の定義の同値関係を使って順序を入れ替え, $u_1, \ldots, u_k \in X$, $u_{k+1}, \ldots, u_{n+1} \in$

$A \times [0,1]$ と仮定してよい。$k+1 \leq i \leq n+1$ に対し, $u_i = (a_i, t_i)$ と書く。このとき, 必要なら更に順序を入れ替え $t_{k+1} \leq \ldots \leq t_{n+1}$ であると仮定してよい。よって $(t_{k+1}, \ldots, t_{n+1}) \in \Delta^{n-k-1}$ である。このように代表元を取ると,

$$\begin{aligned}
&([u_1, \ldots, u_k], [a_{k+1}], \ldots, [a_n], [a_{n+1}]; (t_{k+1}, \ldots, t_{n+1})) \\
&\qquad \in \mathrm{SP}^k(X) \times \left(\mathrm{SP}^1(A)\right)^{n-k} \times \mathrm{SP}^1(A) \times \Delta^{n-k} \\
&\qquad\qquad \subset B_{n-k}(\mathrm{SP}^\infty(X), \mathrm{SP}^\infty(A), \mathrm{SP}^\infty(A)) \times \Delta^{n-k}
\end{aligned}$$

である元が「定まる」。ここで括弧を付けたのは, $t_i = t_{i+1}$ であるような i が存在した場合, a_i と a_{i+1} の順序が定まらないことである。幸い, 単体的空間の幾何学的実現の定義の際の同値関係で

$$\begin{aligned}
&([u_1, \ldots, u_k], [a_{k+1}], \ldots, [a_i], [a_{i+1}], \ldots, [a_n], [a_{n+1}]; (t_{k+1}, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1})) \\
&\sim ([u_1, \ldots, u_k], [a_{k+1}], \ldots, [a_i, a_{i+1}], \ldots, [a_n], [a_{n+1}]; (t_{k+1}, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}))
\end{aligned}$$

となるので, 幾何学的実現 $|B_*(SP^\infty(X), \mathrm{SP}^\infty(A), \mathrm{SP}^\infty(A))|$ の元としては, well-defined である。この対応により $\varphi^{(n)}$ が定まる。$SP^{n+1}(X, A \times [0,1]) \to \mathrm{SP}^{n+2}(X \cup [0,1])$ の包含とも可換になっていることが分かる。以上より, 連続写像

$$\varphi : \mathrm{SP}^\infty(X \cup A \times [0,1]) \longrightarrow |B_*(SP^\infty(X), \mathrm{SP}^\infty(A), \mathrm{SP}^\infty(A))|$$

が得られる。

その逆写像を定義するために, まず $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_{k+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ を取り, 写像

$$\psi_{\boldsymbol{n}} : \mathrm{SP}^{n_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{SP}^{n_k}(A) \times \mathrm{SP}^{n_{k+1}}(A) \times \Delta^k \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(A \times [0,1])$$

を

$$\begin{aligned}
&\psi_{\boldsymbol{n}}([a_{1,1}, \ldots, a_{1,n_1}], \ldots, [a_{k+1,1}, \ldots, a_{k+1,n_{k+1}}], (t_0, \ldots, t_k)) \\
&\qquad = ([(a_{1,1}, t_0), \ldots, (a_{1,n_1}, t_0)], \ldots, [(a_{k+1,1}, t_k), \ldots, (a_{k+1,n_{k+1}}, t_k)])
\end{aligned}$$

で定義する。この左側に $\mathrm{SP}^{n_0}(X)$ を追加し, $n_0, \ldots, n_{k+1}$ を ∞ に動かした「極限」を取ることにより, 写像

$$\psi : |B_*(\mathrm{SP}^\infty(X), \mathrm{SP}^\infty(A), \mathrm{SP}^\infty(A))| \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X \cup A \times [0,1])$$

を得る。これが, φ の逆写像である。

B.6　付録 A 問いの解答例

解答例 (A.1.13)**.** 写像 e が全単射であることはすぐ分かる。$\mathrm{Map}([n], X)$ のコンパクト開位相の準基底は, $K \subset [n]$ と開集合 $U \subset X$ により $W(K, U)$ で与えられているが,

$$e(W(K,U)) = \{(f(1), \ldots, f(n)) \mid i \in K \text{ ならば } f(i) \in U\}$$

であり, これはいくつかの U と X の直積集合である。特に, X の開集合 U_1, …, U_n に対し

$$U_1 \times \cdots \times U_n = (U_1 \times X \times \cdots \times X) \cap \cdots \cap (X \times \cdots \times X \times U_n)$$

は, コンパクト開位相で開となる。このことは, コンパクト開位相の基底, すなわち $W(K, U)$ 達の共通部分が, 直積位相で開であることも示している。よって e は同相写像である。

解答例 (A.1.14)**.** 正確を期すために, 写像

$$\ell : M_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

を $\ell(A)(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき

$$U \subset M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ が距離位相で開} \iff \ell(U) \text{ が } \ell(M_{m,n}(\mathbb{R})) \text{ のコンパクト開位相で開}$$

を示せばよい。

まず, $U \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ を距離位相での開集合とする。$A \in U$ に対し, $\delta > 0$ があり, $U_\delta(A) \subset U$ となる。$\ell(U_\delta(A))$ がコンパクト開位相で open であることを示そう。$B \in U_\delta(A)$ に対し

$$\delta' = \delta - \|B - A\|$$

とおく。このとき

$$\bigcap_{i=1}^{n} W\left(\{\boldsymbol{e}_i\}, U_{\frac{\delta'}{\sqrt{n}}}(A\boldsymbol{e}_i)\right) \cap \ell(M_{m,n}(\mathbb{R})) \subset \ell(U_\delta(A))$$

を示す。$\ell(C)$ を左辺の共通部分から取る。このとき

$$\|C - A\| \leq \|C - B\| + \|B - A\|$$

であるが,

$$\begin{aligned}\|C-B\| &= \sqrt{\|C\boldsymbol{e}_1 - B\boldsymbol{e}_1\|^2 + \cdots + \|C\boldsymbol{e}_n - B\boldsymbol{e}_n\|^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\delta'}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta'}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \delta' \\ &= \delta - \|B-A\|\end{aligned}$$

である。よって

$$\|C-A\| < \delta$$

となり, $\ell(C) \in \ell(U_\delta(A))$ となる。これで

$$\ell(B) \in \bigcap_{i=1}^{n} W\left(\{\boldsymbol{e}_i\}, U_{\frac{\delta'}{\sqrt{n}}}(A\boldsymbol{e}_i)\right) \cap \ell(M_{m,n}(\mathbb{R})) \subset \ell(U_\delta(A))$$

が示され, $\ell(U_\delta(A))$ がコンパクト開位相で開集合であることが示された。

逆に, コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ と開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ に対し, $\ell^{-1}(W(K,U))$ が距離位相で開であることを示そう。$A \in \ell^{-1}(W(K,U))$ をとると, $\ell(A)(K) \subset U$, つまり任意の $\boldsymbol{x} \in K$ に対し $A\boldsymbol{x} \in U$ である。写像

$$\mathrm{ad}^{-1}(\ell) : M_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

は, 各成分で和と積で定義されているので, 距離位相で連続である。よって, 各 $\boldsymbol{x} \in K$ に対し,

$$A\boldsymbol{x} \in U_{\varepsilon_{\boldsymbol{x}}}(A) U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) \subset U$$

となる, $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} > 0$ と $\varepsilon'_{\boldsymbol{x}} > 0$ が存在する。$\{U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x} \in K}$ は K の開被覆であり, K はコンパクトだから, K の点 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ を選び K を $U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}_1}}(\boldsymbol{x}), \ldots, U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}_k}}(\boldsymbol{x})$ で覆うことができる。そこで,

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{\boldsymbol{x}_i} \mid i = 1, \ldots, k\}$$

とおくと,

$$AK \subset U_\varepsilon(A)\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}_i}}(\boldsymbol{x}_i)\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_{\varepsilon_{\boldsymbol{x}_i}}(A)\right)\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon'_{\boldsymbol{x}_i}}(\boldsymbol{x}_i)\right) \subset U$$

となる。これより $A \in U_\varepsilon(A) \subset \ell^{-1}(W(K,U))$ となり, $\ell^{-1}(W(K,U))$ が距離位相で開であることが示された。

解答例 (A.2.15)**.** f の $\mathcal{B}_V$ と $\mathcal{B}_W$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{w}_n \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{w}_n \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{v}_m) &= a_{1m}\boldsymbol{w}_1 + a_{2m}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{w}_n \end{aligned}$$

である。すると

$$\begin{aligned} (f^*(\boldsymbol{w}_i^*))(\boldsymbol{v}_j) &= (\boldsymbol{w}_i^* \circ f)(\boldsymbol{v}_j) \\ &= \boldsymbol{w}_i^*(f(\boldsymbol{v}_j)) \\ &= \boldsymbol{w}_i^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{w}_k \right) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

となる。これは,

$$f^*(\boldsymbol{w}_i^*) = a_{i1}\boldsymbol{v}_1^* + a_{i2}\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + a_{im}\boldsymbol{v}_m^*$$

であることを意味する。よって f^* の表現行列は ${}^tA$ となる。

Bibliography

[横田一 71] 横田一郎. **群と位相**. 東京: 裳華房, 1971 (cit. on p. 332).