「新版 固体の電子論」への補足

この「補足」では、本の中で記すには余りに計算が長くなるために省略し、結論のみを記した部分について、計算の筋道を説明する。

1 微視的に見たフェルミ流体（3.2.3 節）式 (3.53) と式 (3.54)

式 (3.53) は、次のように、式 (3.52) の $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ の和を積分に直して、積分を実行すると得られる。まず、式 (3.52) の和

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\frac{n_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}_1} \tag{1}$$

に $\varepsilon_i=\hbar^2\boldsymbol{k}_i^2/2m$ $(i=1,2)$ を代入し、$\boldsymbol{k}_2$ の和はデルタ関数を利用し、$\boldsymbol{k}_1$ の和を積分に直すと

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\frac{n_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}_1}=\frac{2m}{\hbar^2}\int\frac{d\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{n_1}{(\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}-\boldsymbol{k}_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}_1)^2-\boldsymbol{k}_1^2} \tag{2}$$

となる。n_1 は $T=0$ のフェルミ分布関数であるので階段関数 $\theta(k_\mathrm{F}-|\boldsymbol{k}_1|)$ （$\theta(x)$ は $x>0$ のとき 1、それ以外では 0）に他ならない。$\boldsymbol{k}_1$ などを k_F で規格化し、$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{k}_1/k_\mathrm{F},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}_\mathrm{F}/k_\mathrm{F},\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}/k_\mathrm{F}$ と変数変換すると便利である。また、$\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}-\boldsymbol{k}_\mathrm{F}$ と $\boldsymbol{k}_1$ の間の角度の cosine を t_1 とすると、(2) は

$$N(\varepsilon_\mathrm{F})\int_0^1 dq_1q_1^2\int_{-1}^1 dt_1\frac{1}{|\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}|^2+2t_1|\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}|q_1} \tag{3}$$

となる。ここで $N(\varepsilon_\mathrm{F})=m/k_\mathrm{F}/2\pi^2$ はフェルミ · エネルギーでの状態密度である。(3) では、t_1 の積分を実行し、その後で q_1 について積分するだけである。計算は少し長くなるが、最終的に式 (3.53) が得られる。

次に、$f_{\uparrow\downarrow}$ については、式 (3.51) の

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\frac{n_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_\mathrm{F}}\delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_\mathrm{F}+\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}} \tag{4}$$

を計算すればよい。まず、前と同じように、$\varepsilon_i=\hbar^2\boldsymbol{k}_i^2/2m$ $(i=1,2)$ を代入し、すべての波数ベクトルを k_F で測った量 $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{k}_1/k_\mathrm{F},\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{k}_2/k_\mathrm{F},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}_\mathrm{F}/k_\mathrm{F},\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{k}'_\mathrm{F}/k_\mathrm{F}$ を使って表すと、(4) は

$$N(\varepsilon_\mathrm{F})\int_0^1 dq_1q_1^2\int_{-1}^1 dt_1\frac{1}{|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'|^2-2+2q_1^2-2t_1|\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{q}|q_1} \tag{5}$$

となる。ここで、t_1 は $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'$ と $\boldsymbol{q}_1$ の間の角度の cosine である。(5) では t_1 積分を行い、その後で q_1 積分を行えばよい。特別な困難はない。その結果、式 (3.54) が得られる。

2　微視的に見たフェルミ流体（3.2.3 節）式 (3.59) と式 (3.60)

まず、式 (3.59) の計算の手順を説明する。$\boldsymbol{k}_3$ についての和はデルタ関数を用い、$\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ の和を積分に直し、フェルミ分布関数を階段関数に置き換えると

$$\langle n_{\boldsymbol{k}\sigma}\rangle^{(2)} = -\frac{U^2a^6}{(2\pi)^6}\frac{4m^2}{\hbar^4}\int d\boldsymbol{k}_1\int d\boldsymbol{k}_2\frac{\theta(k_{\mathrm{F}}^2-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k})^2)\theta(\boldsymbol{k}_1^2-k_{\mathrm{F}}^2)\theta(\boldsymbol{k}_2^2-k_{\mathrm{F}}^2)}{(\boldsymbol{k}^2+(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k})^2-\boldsymbol{k}_1^2-\boldsymbol{k}_2)^2} \tag{6}$$

となる。

$\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ の代わりに

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\qquad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2 \tag{7}$$

を導入し、積分を書き直すと便利である。その際、

$$\boldsymbol{k}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}),\qquad \boldsymbol{k}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}),\qquad d\boldsymbol{k}_1d\boldsymbol{k}_2=\Big(\frac{1}{2}\Big)^3d\boldsymbol{s}d\boldsymbol{q} \tag{8}$$

に注意する。また、

$$\boldsymbol{k}^2+(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k})^2-\boldsymbol{k}_1^2-\boldsymbol{k}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{k})^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2 \tag{9}$$

である。これらを代入すると (6) は

$$\begin{aligned}\langle n_{\boldsymbol{k}\sigma}\rangle^{(2)} &= -\frac{U^2a^6}{(2\pi)^6}\frac{4m^2}{\hbar^4}\frac{1}{8}\int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\frac{4}{[(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{k})^2-\boldsymbol{q}^2]^2}\\ &\quad\times\theta(|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\theta(|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\theta(k_{\mathrm{F}}-|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}|)\end{aligned} \tag{10}$$

となる。

以後は、$\boldsymbol{k}$ がフェルミ面近くの場合、すなわち、$\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の場合に限ることにしよう。(10) は $\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の方向に依らないはずであるから、この段階で $\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の方向について平均すると後の計算が簡単になる。$\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の方向が関係する 2 つの因子は

$$[(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})^2-\boldsymbol{q}^2]^2=(s^2-q^2+4k_{\mathrm{F}}^2-4sk_{\mathrm{F}}\cos\phi)^2 \tag{11}$$

$$\theta(k_{\mathrm{F}}^2-|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}|^2)=\theta(2k_{\mathrm{F}}\cos\phi-s) \tag{12}$$

と書き直せる。ここで ϕ は $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の間の角度である。$t=\cos\phi$ とおくと、$\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$ の方向に依存する部分の平均は

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dt\frac{\theta(2k_{\mathrm{F}}t-s)}{(s^2-q^2+4k_{\mathrm{F}}^2-4k_{\mathrm{F}}st)^2}=\frac{1}{8k_{\mathrm{F}}s}\Big(\frac{1}{s^2+q^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big) \tag{13}$$

となる。ここで、s は $2k_{\mathrm{F}}$ より小さいことを使っている。よって、(10) は

$$\begin{aligned}\langle n_{\boldsymbol{k}\sigma}\rangle^{(2)}\Big|_{k=k_{\mathrm{F}}-0} &= -\frac{U^2a^6}{(2\pi)^6}\frac{2m^2}{\hbar^4}\frac{1}{8k_{\mathrm{F}}}\int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\ \theta(|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\theta(|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\\ &\quad\times\frac{1}{s}\Big[\frac{1}{s^2+q^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big]\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる。

$\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{q}$ の間の角度 φ についての積分は、$w = \cos\varphi$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} dw \theta(s^2+q^2+2sqw-4k_{\mathrm{F}}^2)\theta(s^2+q^2-2sqw-4k_{\mathrm{F}}^2) \\
= & \int_{-1}^{1} dw \theta(A+w)\theta(A-w) \\
= & \ 2A\theta(1-A)\theta(A)+2\theta(A-1) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $A=(s^2+q^2-4k_{\mathrm{F}}^2)/2sq$ である。これを代入すると、

$$
\begin{aligned}
& \int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\ \theta(|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\theta(|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}|-2k_{\mathrm{F}})\frac{1}{s}\Big[\frac{1}{s^2+q^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big] \\
= & \int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\ \Big[\theta(1-A)\theta(A)\frac{1}{qs}\frac{2k_{\mathrm{F}}-s}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2} \\
& \qquad +\theta(A-1)\frac{1}{s}\Big(\frac{1}{q^2+s^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big)\Big] \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。

(16) の右辺第 1 項を $I^{(1)}$ と書くことにする。

$$
\begin{aligned}
I^{(1)} &= \int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\ \theta(1-A)\theta(A)\frac{1}{qs}\frac{2k_{\mathrm{F}}-s}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2} \\
&= (4\pi)^2\int_0^{2k_{\mathrm{F}}} ds\ s\int_0^{\infty} dq\ q\ \theta(1-A)\theta(A)\frac{2k_{\mathrm{F}}-s}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$1>A$、$A>0$ という条件は

$$
\begin{aligned}
\theta(1-A)\theta(A) \ \rightarrow\ & \theta(s-q)\theta\Big(q-\sqrt{4k_{\mathrm{F}}^2-s^2}\Big) \\
& +\theta(q-s)\theta(s+2k_{\mathrm{F}}-q)\theta\Big(q-\sqrt{4k_{\mathrm{F}}^2-s^2}\Big) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

とも表わせることに注意し、最初に q について積分し、その後 s について積分すればよい。積分の結果は

$$
I^{(1)} = 2\pi^2 k_{\mathrm{F}}^3\Big(\frac{4}{3}\log 2+\frac{10}{9}\Big) \qquad (19)
$$

といなる。

次に、(16) の右辺第 2 項を $I^{(2)}$ と書き、この量を計算する。$I^{(2)}$ は

$$
\begin{aligned}
I^{(2)} &= \int d\boldsymbol{s}\int d\boldsymbol{q}\ \theta(A-1)\frac{1}{s}\Big(\frac{1}{q^2+s^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big) \\
&= (4\pi)^2\int_0^{2k_{\mathrm{F}}} ds\ s\int_0^{\infty} dq\ q^2\ \theta(A-1)\Big(\frac{1}{q^2+s^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{1}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big) \\
&= (4\pi)^2\int_0^{2k_{\mathrm{F}}} ds\ s\int_0^{\infty} dq\ \theta(A-1)\Big(\frac{4k_{\mathrm{F}}^2-s^2}{q^2+s^2-4k_{\mathrm{F}}^2}-\frac{(s-2k_{\mathrm{F}})^2}{q^2-(s-2k_{\mathrm{F}})^2}\Big) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

であるが、$A > 1$ という条件は

$$\theta(A-1) \to \theta(q-s)\theta(q-s-2k_{\mathrm{F}}) \tag{21}$$

である。(20) の第 1 項では最初に s について、その後で q について積分する。他方、第 2 項では最初に q、その後で s について積分するのが便利である。積分を実行すると

$$I^{(2)} = 2\pi^2 k_{\mathrm{F}}^3 \Big(\frac{8}{3}\log 2 + \frac{2}{9}\Big) \tag{22}$$

が得られる。$I^{(1)}$ と $I^{(2)}$ の和は

$$I^{(1)} + I^{(2)} = 8\pi^2 k_{\mathrm{F}}^3 \Big(\log 2 + \frac{1}{3}\Big) \tag{23}$$

となる。これから式 (3.61) が得られる。

式 (3.60) の計算も同じような手順で行えばよい。

3　相互作用の効果ー局所フェルミ流体（4.4.2 節）式 (4.87)

式 (4.71) の積分を実行する。準備として、次の関数を定義しておこう。

$$G_0(i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{N_d(x)}{i\varepsilon - x} \tag{24}$$

$$N_d(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\Delta}{x^2+\Delta^2} \tag{25}$$

式 (24) の i は虚数単位、ε は実数である。式 (24) の $G_0(i\varepsilon)$ は、積分を実行すると

$$G_0(i\varepsilon) = \frac{\theta(\varepsilon)}{i\varepsilon + i\Delta} + \frac{\theta(-\varepsilon)}{i\varepsilon - i\Delta} \tag{26}$$

であることがわかる。$\theta(\varepsilon)$ は階段関数で、$\varepsilon > 0$ のとき $\theta(\varepsilon) = 1$、$\varepsilon < 0$ のとき $\theta(\varepsilon) = 0$ である。$G_0(i\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ で跳びがある関数である。

次に、積 $G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon)G_0(i\varepsilon)$ の ε についての積分を考える。ここでも ε' は実数である。定義 (24) より、

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon)G_0(i\varepsilon) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ N_d(x_1)N_d(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi}\ \frac{1}{(i\varepsilon' + i\varepsilon - x_1)(i\varepsilon - x_2)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ N_d(x_1)N_d(x_2)\ \frac{\theta(x_1)\theta(-x_2) - \theta(-x_1)\theta(x_2)}{i\varepsilon' - x_1 + x_2}
\end{aligned} \tag{27}$$

が得られる。さらにもう一つ $G_0(i\omega + i\varepsilon')$ を掛けて、ε' について積分すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi}\; G_0(i\omega + i\varepsilon') G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon) G_0(i\varepsilon) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3\; N_d(x_1) N_d(x_2) N_d(x_3) \\
&\quad \times \frac{\theta(x_1)\theta(-x_2)\theta(-x_3) + \theta(-x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)}{i\omega - x_1 + x_2 + x_3} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

となる。さらに、$N_d(x)$ が x の偶関数であることを利用すると

$$
\begin{aligned}
\text{上式} \;=\; & -\int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 \int_0^{\infty} dx_3 N_d(x_1) N_d(x_2) N_d(x_3) \\
& \times \Big[\frac{1}{i\omega - x_1 - x_2 - x_3} + \frac{1}{i\omega + x_1 + x_2 + x_3} \Big] \qquad (29)
\end{aligned}
$$

が得られる。この式の両辺から ω の 1 次の項を取り出せば

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\omega \to 0} \frac{\partial}{\partial(i\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi}\; G_0(i\omega + i\varepsilon') G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon) G_0(i\varepsilon) \\
&= 2 \int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 \int_0^{\infty} dx_3\; \frac{N_d(x_1) N_d(x_2) N_d(x_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

が得られるが、右辺は式 (4.71) の積分に他ならない。よって、左辺を計算すればよい。

$G_0(i\varepsilon)$ は、式 (26) のように、$\varepsilon = 0$ で跳びのある関数であることに注意すると、

$$
\lim_{\omega \to 0} \frac{\partial}{\partial(i\omega)} G_0(i\omega + i\varepsilon') = -[G_0(i\varepsilon')]^2 - \frac{2}{\Delta}\delta(\varepsilon') \qquad (31)
$$

である。これを (30) の左辺に代入する。式 (31) の右辺の第 1 項の寄与を A、第 2 項の寄与を B としよう。B は

$$
B = -\frac{1}{\pi\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi}\; [G_0(i\varepsilon)]^2 = \frac{1}{(\pi\Delta)^2} \qquad (32)
$$

と容易に求まる。A は

$$
A = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi}\; [G_0(i\varepsilon')]^2 G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon) G_0(i\varepsilon) \qquad (33)
$$

であるが、ε についての積分は

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} G_0(i\varepsilon' + i\varepsilon) G_0(i\varepsilon) = -\frac{2\Delta}{\pi|\varepsilon'|(|\varepsilon'| + 2\Delta)} \log\Big(\frac{|\varepsilon'| + \Delta}{\Delta}\Big) \qquad (34)
$$

である。これを (33) に代入して、$\varepsilon'/\Delta = x$ と変数変換すると、

$$
\begin{aligned}
A \;&=\; -\frac{2}{(\pi\Delta)^2} \int_0^{\infty} dx\; \frac{1}{(x+1)^2 x(x+2)} \log(x+1) \\
&=\; -\frac{2}{(\pi\Delta)^2} \int_0^{\infty} dt\; \frac{te^{-3t}}{1 - e^{-2t}} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

と表せる。ここで、$x+1=e^t$ と置き換えている。残る積分は簡単で

$$A=-\frac{2}{(\pi\Delta)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\ te^{-(2n+3)t}=-\frac{2}{(\pi\Delta)^2}\Big(\frac{\pi^2}{8}-1\Big) \tag{36}$$

である。ここで $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-2}=\pi^2/8$ を用いた。

A と B を加えると

$$A+B=\frac{1}{(\pi\Delta)^2}\Big(3-\frac{\pi^2}{4}\Big) \tag{37}$$

となる。こうして式 (4.87) の結果が得られる。

[以上 2010 年 4 月 30 日 記す]