第 2 章 追加例題

$\boxed{\text{例題 2.11}}$ 球座標を利用して，半径 a の球の表面積と体積を求めなさい．

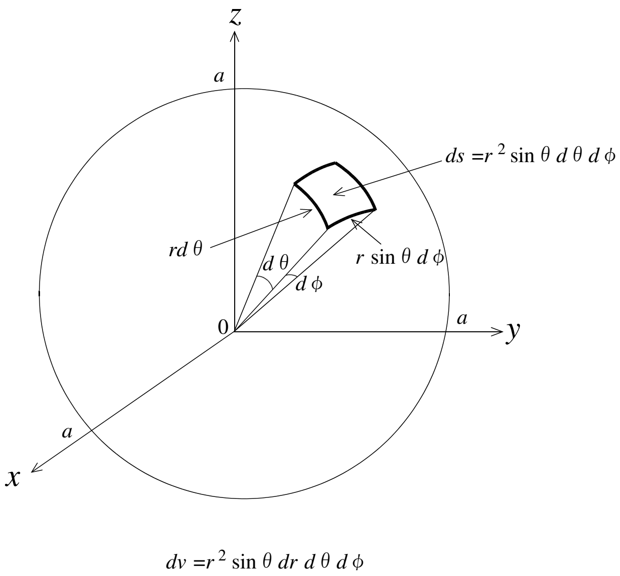


図2.34　例題2.11の球

$\boxed{\text{解答}}$ まず，表面積は，微分面素 $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ を用います．

$$
\begin{aligned}
\text{表面積} &= \int_s ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\
&= r^2 \Big[\phi\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = r^2\, 2\pi(-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi r^2
\end{aligned}
$$

となり，さらに半径は $r = a$ ですから

表面積 $= 4\pi a^2$　と求まります．

次に，体積は，微分体積 $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ を用います．

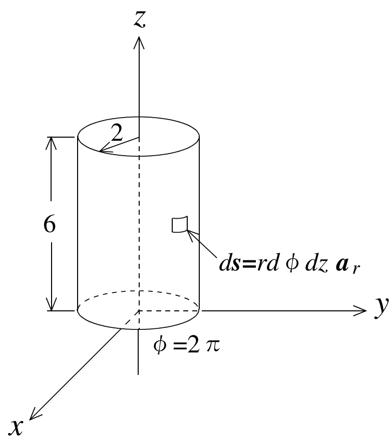
$$
\begin{aligned}
\text{体積} &= \int_v dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{a} r^2 dr \\
&= \Big[\phi\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a} = 2\pi(-\cos\pi + \cos 0)\,\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}
$$

と求まります．

第 4 章 追加演習問題

▷ **4.3**　円柱座標において，電束密度が $\boldsymbol{D} = (10r^3/3)\,\boldsymbol{a}_r$ [C/m^2] で与えられたとき，$r = 2$ [m]，$\phi = 2\pi$ [rad]，$z = 6$ [m] で囲まれた体積についてガウスの発散定理の両辺を計算しなさい．

＜解答＞　問題で与えられた円柱を解図 4.4 に示します．円柱の側面に対する微分面素は，図 2.29 を参照すれば，$ds_3 = r\,d\phi\,dz$ ですから，解図 4.4 のように $d\boldsymbol{s} = r\,d\phi\,dz\,\boldsymbol{a}_r$ です．



解図4.4　演習問題4.3の体積

まず，ガウスの発散定理の左辺は

$$
\begin{aligned}
\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^6\int_0^{2\pi}\left(\frac{10\,r^3}{3}\right)\boldsymbol{a}_r\cdot r d\phi dz\,\boldsymbol{a}_r = \frac{10\,r^4}{3}\int_0^6 dz\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{10\,r^4}{3}\Big[z\Big]_0^6\Big[\phi\Big]_0^{2\pi} = 40\pi r^4 \text{ [C]}
\end{aligned}
$$

となります．そして，$r = 2$ [m] ですから

$$40\pi(2)^4 = 640\pi = 2010.6 \text{ [C]}$$

と円柱内の電荷量が求まりました．次に，右辺ですが，先に div$\boldsymbol{D}$ を求めておきます．円柱座標なので式 (2.88) を参照して

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{10r^3}{3}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{10}{3}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^4) = \frac{40}{3}\,r^2$$

となり，div$\boldsymbol{D}$$= 40\,r^2/3$ と求まったので

$$
\begin{aligned}
\int_V(\mathrm{div}\boldsymbol{D})\,dv &= \int_0^6\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\frac{40\,r^2}{3}\right) rdrd\phi dz = \frac{40}{3}\int_0^6 dz\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^2 r^3 dr \\
&= \frac{40}{3}\Big[z\Big]_0^6\Big[\phi\Big]_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 640\pi = 2010.6 \text{ [C]}
\end{aligned}
$$

と求まり，両辺が一致した値となります．

▷ **4.4**　球座標において，$r \leq 2$ [m] の領域で電界が $\boldsymbol{E} = (8\,r \times 10^{-5}/\varepsilon_0)\,\boldsymbol{a}_r$ [V/m] である．このとき，$r = 2$ [m] の球殻内に存在する実効電荷を求めなさい．

＜解答＞　まず，この領域における電荷密度 ρ を求めるため，球座標における電界の発散（ベクトル界を発生している源を調べる演算）を式 (2.78) を参照して

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{8\,r \times 10^{-5}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{8 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right) = \frac{24 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0}$$

となります．ここで，div$\boldsymbol{E}$$= \rho/\varepsilon_0$（式 (4.10)）より

$$\rho = 24 \times 10^{-5}\ [\mathrm{C/m^3}]$$

となりますから $r = 2$ [m] の球殻内に存在する実効電荷 Q は，球の体積を掛けることにより

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 24 \times 10^{-5} \times \frac{4}{3}\pi(2)^3 = 8.04 \times 10^{-3}\ [\mathrm{C}]$$

となります．

▷ **4.5**　球座標において，電束密度が $\boldsymbol{D} = (15\,r^2/8)\,\boldsymbol{a}_r$ [C/m^2] で与えられたとき，$r = 1$ [m] と $r = 2$ [m] との間の体積について，ガウスの発散定理の両辺を計算しなさい．

＜解答＞　まず，ガウスの発散定理の左辺は

$$\begin{aligned}
\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{15\,r^2}{8}\right)\boldsymbol{a}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi\,\boldsymbol{a}_r = \frac{15\,r^4}{8}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{15\,r^4}{8}\Big[\phi\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = 7.5\pi\,r^4\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}$$

となります．そして，$r = 2$ [m] から $r = 1$ [m] を引けば

$$7.5\pi(2)^4 - 7.5\pi(1)^4 = 112.5\pi = 353.4\ [\mathrm{C}]$$

と体積内の電荷量が求まりました．次に，右辺ですが，先に div$\boldsymbol{D}$ を求めておきます．球座標なので式 (2.89) を参照して

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{15r^2}{8}\right) = \frac{1}{r^2}\,\frac{15}{8}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^4) = 7.5\,r$$

となり，div$\boldsymbol{D}$$= 7.5\,r$ と求まったので，

$$\begin{aligned}
\int_V (\mathrm{div}\boldsymbol{D})\,dv &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}(7.5\,r)\,r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 7.5\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_1^2 r^3 dr \\
&= 7.5\Big[\phi\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = 112.5\pi = 353.4\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}$$

と求まり，両辺が一致した値となります．

第 5 章 5.6 節 p.74 下 3 行目に追加

次に，円柱座標と球座標のラプラスの方程式を示しておきます．また，あわせて $\boldsymbol{E} = -\nabla V$（式 (5.21)）に関係する $\nabla V = \mathrm{grad}\, V$（p.39 参照）の式も示しておきます．

＜円柱座標＞

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad [\mathrm{V/m^2}] \tag{5.28}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \quad [\mathrm{V/m}] \tag{5.29}$$

＜球座標＞

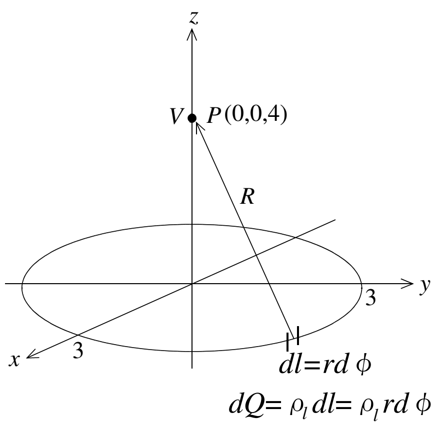
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad [\mathrm{V/m^2}] \tag{5.30}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \quad [\mathrm{V/m}] \tag{5.31}$$

第 5 章 追加演習問題

▷ **5.5**　x-y 平面に原点を中心とした半径 3 [m] の円環上に電荷が一様に $\rho_l = 5/\pi$ [nC/m] で分布している．$z = 4$ [m] の点 P での電位 V を求めなさい．

＜解答＞　座標系は，円柱座標を用います．解図 5.1 に示したように微小長さ dl から点 P までの距離 R は，$r = 3$ [m]，$z = 4$ [m] なので $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ [m] となります．



解図5.1　演習問題5.5の図

微分電位 dV は，微小長さ dl の部分の電荷量を微分電荷 dQ として，点電荷と同じように扱えば，

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_l r d\phi}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

となります．したがって，点 P の電位 V は，円周を全体にわたって積分すれば

$$V = \int_L dV = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l r}{4\pi\varepsilon_0 R} d\phi = \frac{\rho_l r}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{(5/\pi) \times 10^{-9} \times 3}{4\pi(10^{-9}/36\pi) \times 5} \cdot 2\pi = 54 \text{ [V]}$$

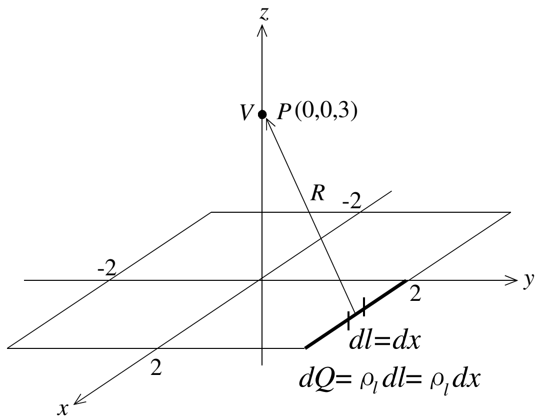
と求まります．

▷ **5.6**　x-y 平面に原点を中心にした一辺が 4 [m] の正方形の線上に電荷が一様に $\rho_l = 1$ [nC/m] で分布している．$z = 3$ [m] の点 P での電位 V を求めなさい．

＜解答＞　この問題では，円柱座標ではなく直角座標を用います．また，正方形全体を考えるのではなく，解図 5.2 のように太線で示した一部分 $(0 \leq x \leq 2,\ y = 2,\ z = 0)$ のみに着目します．まず，この部分による点 P の電位 V_1 を求めます．図中の微小長さ dl から点 P までの距離 R は，直角座標ですから $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 13}$ となります．距離 R が与えられましたから微分電位 dV_1 は，

$$dV_1 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_l dx}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

となります．したがって，$(0 \leq x \leq 2,\ y = 2,\ z = 0)$ の部分による点 P の電位 V_1 は，$0 \leq x \leq 2$ の範囲にわたって積分すれば



解図5.2　演習問題5.6の図

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \int_L dV_1 = \int_0^2 \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 R} dx = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+13}} dx = \frac{1\times 10^{-9}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)}\left[\ \ln\left|x+\sqrt{x^2+13}\right|\right]_0^2 \\
&= 9\left(\ln\left|2+\sqrt{2^2+13}\right| - \ln\left|\sqrt{13}\right|\right) = 4.766\ [\mathrm{V}]
\end{aligned}
$$

となります．よって，正方形全体による点 P の電位 V は，この値を 8 倍して

$$V = V_1 \times 8 = 38.13\ [\mathrm{V}]$$

と求まります．

▷ **5.7**　円柱座標系において，軸対称で $r \geq 5$ [mm] では電荷は存在せず，かつ電位は r のみの関数である．$r = 5$ [mm] の位置で $V = 75$ [V]，$r = 60$ [mm] では $V = 0$ [V] である．$r = 130$ [mm] の位置での電圧を求めなさい．

＜解答＞　円柱座標で電位が r のみの関数なので，ラプラスの方程式は式 (5.28) から

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

となります．ここで，上式を r で積分すれば

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)\ dr = \int\ 0\ dr + A \qquad (A\ \text{は積分定数})$$

$$r\frac{dV}{dr} = A \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dr} = \frac{1}{r}A$$

となります．さらに，上式をもう一度 r で積分すれば

$$\int \frac{dV}{dr}\ dr = A\int \frac{1}{r}\ dr + B \qquad (B\ \text{は積分定数})$$

$$V = A\ln|r| + B$$

となり，電位に関する式が求まりました．そして 2 つの境界条件を上式にそれぞれ当てはめれば，

$$75 = A\ln(5 \times 10^{-3}) + B \qquad\qquad 0 = A\ln(60 \times 10^{-3}) + B$$

から，$A = -30.2$ および $B = -84.9$ と求まります．したがって，$r = 130$ [mm] の位置での V は

$$V = -30.2\ln(130 \times 10^{-3}) - 84.9 = -23.3 \text{ [V]}$$

となります．

▷ **5.8**　球座標系において，球対称で $r \geq 15$ [mm] では電荷は存在せず，かつ電位は r のみの関数である．$r = 15$ [mm] の位置で $V = 0$ [V]，$r = 110$ [mm] の位置で $\boldsymbol{E} = -334.7\boldsymbol{a}_r$ [V/m] である．$r = 200$ [mm] の位置での電圧を求めなさい．

＜解答＞　球座標で電位が r のみの関数なので，ラプラスの方程式は式 (5.30) から

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

となります．ここで，上式を r で積分すれば

$$\int \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)\,dr = \int 0\,dr + A \qquad (A\text{ は積分定数})$$

$$r^2\frac{dV}{dr} = A \quad\rightarrow\quad \frac{dV}{dr} = \frac{1}{r^2}A$$

となります．さらに，上式をもう一度 r で積分すれば

$$\int \frac{dV}{dr}\,dr = A\int \frac{1}{r^2}\,dr + B \qquad (B\text{ は積分定数})$$

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

となり，電位に関する式が求まりました．上式に $r = 15$ [mm] での境界条件を当てはめれば

$$0 = -\frac{A}{15 \times 10^{-3}} + B \quad\rightarrow\quad B = 66.67A$$

また，$r = 110$ [mm] の位置で $\boldsymbol{E} = -334.7\boldsymbol{a}_r$ [V/m] で，電位が r のみの関数なので式 (5.31) から

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{A}{r} + B\right)\boldsymbol{a}_r = -\frac{A}{r^2}\boldsymbol{a}_r$$

の $|\boldsymbol{E}|$ と比較することにより

$$-334.7 = -\frac{A}{(110 \times 10^{-3})^2}$$

から $A = 4.05$ および $B = 66.67A = 270.0$ と求まります．したがって，$r = 200$ [mm] の位置での電圧 V は

$$V = -\frac{4.05}{200 \times 10^{-3}} + 270.0 = 249.8 \text{ [V]}$$

となります．

▷ **5.9**　円柱座標系において，軸対称で電位は r のみの関数である．また，電荷密度が $\rho = 88.54/r$ [pC/m^3] である．このため，$r = 1$ [m] のところで $V = 0$ [V]，$r = 3$ [m] のところで $V = 50$ [V] である．このときの電界 $\boldsymbol{E}$ の式を求めなさい．

＜解答＞　円柱座標で電位が r のみの関数で，対象とする領域が既知の電荷密度を含むため，この場合はポアソンの方程式（式 (5.23)）を用いることになります．

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{r\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{88.54 \times 10^{-12}}{8.854 \times 10^{-12}} = -10$$

となります．ここで，上式を r で積分すれば

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)\,dr = \int (-10)\,dr + A \qquad (A \text{ は積分定数})$$

$$r\frac{dV}{dr} = -10\,r + A \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dr} = -10 + \frac{A}{r}$$

となります．さらに，上式をもう一度 r で積分すれば

$$\int \frac{dV}{dr}\,dr = \int \left(-10 + \frac{A}{r}\right)\,dr + B \qquad (B \text{ は積分定数})$$

$$V = -10\,r + A\ln|r| + B$$

となります．上式に $r = 1$ [m] での境界条件を当てはめれば

$$0 = -10 \cdot 1 + A\ln(1) + B \quad \rightarrow \quad B = 10$$

また，$r = 3$ [m] の位置で $V = 50$ [V] から

$$50 = -10 \cdot 3 + A\ln(3) + 10 \quad \rightarrow \quad A = 63.7$$

となり，$A = 63.7$ および $B = 10$ と A, B が求まりました．よって，V の具体的な式は

$$V = -10\,r + 63.7\ln(r) + 10$$

となりますから電界 $\boldsymbol{E}$ の式は，電位が r のみの関数なので式 (5.29) から

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dr}\left(-10\,r + 63.7\ln(r) + 10\right)\boldsymbol{a}_r = \left(10 - \frac{63.7}{r}\right)\boldsymbol{a}_r \ \ \text{[V/m]}$$

のように表せます．

第 10 章 追加演習問題

▷ **10.4**　図 10.10 のような電流が流れる n 本の導体からなる円柱を磁界中で毎分 N 回転させるための仕事率を求めなさい．このとき磁束密度は $\boldsymbol{B} = B_0 \sin 2\phi\, \boldsymbol{a}_r$ とする．ただし，各導体の電流方向は磁束密度の符号が変化する場合には逆方向に変わるものとする．

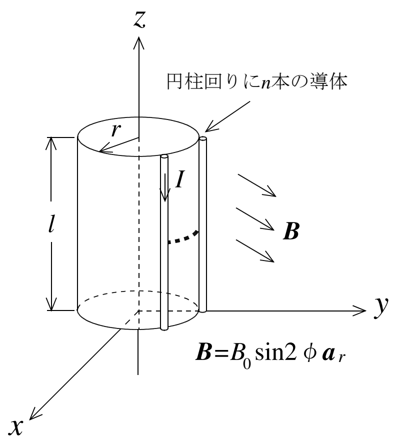


図10.10　問題10.4の円柱

＜解答＞　第 9.3 節などで述べたように電流は基本的にスカラ量です．そこで，$\boldsymbol{L} = l\,\boldsymbol{a}_z$ と長さ l の導体をベクトル表示し，図 10.10 に示すように第 1 象限での電流方向は，$-\boldsymbol{a}_z$ と仮定します．したがって，導体 1 本について作用する力（式 (9.11)）は，

$$\boldsymbol{F} = I(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}) = Il(-\boldsymbol{a}_z) \times B_0 \sin 2\phi\, \boldsymbol{a}_r = B_0 Il \sin 2\phi\, (-\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_r) = B_0 Il \sin 2\phi\, (-\boldsymbol{a}_\phi)$$

となります．ただし，問題にあるように磁束密度の符号，つまり $\sin 2\phi$ の符号が変化したときには電流の向きも変化するので，絶対値を用いて

$$\boldsymbol{F} = B_0 Il |\sin 2\phi|\, (-\boldsymbol{a}_\phi)$$

のように表せます．よって，回転させる力 $\boldsymbol{F}_c$ は

$$\boldsymbol{F}_c = B_0 Il |\sin 2\phi|\, \boldsymbol{a}_\phi$$

となります．したがって，1 本の導体を 1 回転させるのに必要な仕事 W は式 (9.12) より

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} (B_0 Il |\sin 2\phi|\, \boldsymbol{a}_\phi) \cdot (r d\phi\, \boldsymbol{a}_\phi) = B_0 Ilr \int_0^{2\pi} |\sin 2\phi|\, d\phi \\ &= B_0 Ilr \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin 2\phi\, d\phi = B_0 Ilr \cdot \frac{4}{2} \Big[\cos 2\phi\Big]_{\pi/2}^{0} = 4 B_0 Ilr \text{ [J]} \end{aligned}$$

となります．さらに，導体本数が n 本で毎分 N 回転，すなわち毎秒 $(N/60)$ 回転ですから仕事率 P は，単位時間になされる仕事（式 (9.13)）なので

$$P = \frac{W}{t} = 4 B_0 Ilr \cdot n \cdot \frac{N}{60} = \frac{B_0 nIlrN}{15} \text{ [W]}$$

と求まります.

▷ **10.5**　図 10.11 に示すように長さ l の導体が x 軸上にあり，電流 I が $\boldsymbol{a}_x$ 方向に流れている．このとき，一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = B_0\,\boldsymbol{a}_z$ の中で，この導体を y 軸上まで回転させるときの仕事を求めなさい.

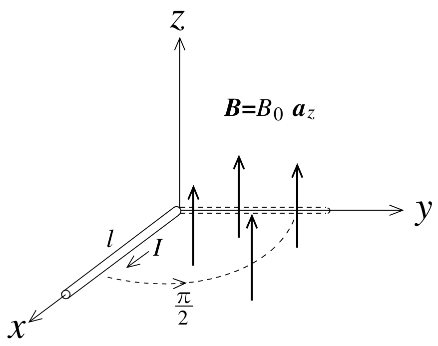
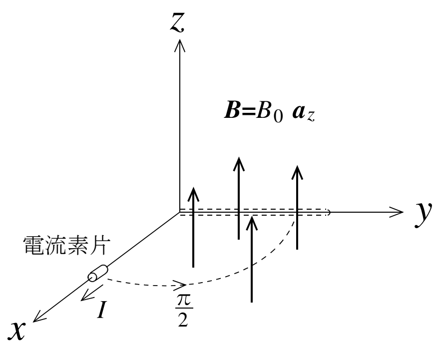


図10.11　問題10.5の図

＜解答＞　導体を $\pi/2$ 回転させる問題なので円柱座標を用います．ただし，導体の長さは l なので，導体内の任意の点は原点からの距離が異なりますから位置によって移動距離が異なってしまいます．そこで，解図 10.2 のように原点から r の距離にある微小な電流素片（単位長さ）を考えます．このとき，導体（電流素片）のベクトル表示は $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a}_r$ となります.



解図10.2　演習問題10.5の電流素片

この電流素片が磁界から受ける力 $\boldsymbol{F}$ は式 (9.11) から

$$\boldsymbol{F} = I(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}) = I\boldsymbol{a}_r \times B_0\boldsymbol{a}_z = B_0 I(\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_z) = B_0 I(-\boldsymbol{a}_\phi)$$

となりますから電流素片を動かすための力 $\boldsymbol{F}_c$ は

$$\boldsymbol{F}_c = B_0 I\,\boldsymbol{a}_\phi$$

で，さらにこの電流素片を $\pi/2$ 回転させる仕事 W_u は式 (9.12) より

$$W_u = \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{\pi/2} (B_0 I\,\boldsymbol{a}_\phi) \cdot (r d\phi\,\boldsymbol{a}_\phi) = B_0 I r \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi B_0 I r}{2}$$

となります．

そして，導体は円柱座標の r 方向に長さ l ですから導体全体を動かすのに必要な仕事 W は

$$W = \int_0^l W_u \, dr = \int_0^l \frac{\pi B_0 I r}{2} \, dr = \frac{\pi B_0 I}{2} \int_0^l r dr = \frac{\pi B_0 I}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^l = \frac{\pi B_0 I l^2}{4} \ [\mathrm{J}]$$

と求まります．

11 章 追加演習問題

▷ **11.3**　図 11.14 のようなフェライト製の環状鉄心（toroid core）がある．鉄心の寸法は，内径 7 [cm]，外径 9 [cm]，厚さ 2 [cm] である．また，コイルの巻数は 100 回である．コイルに 1.76 [A] の電流を流したときの鉄心内の磁束を求めなさい．

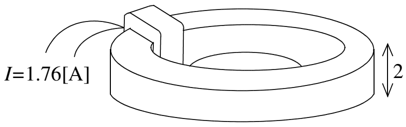


図11.14　問題11.3の環状鉄心

＜解答＞ 巻数が 100 回のコイルに 1.76 [A] の電流を流したので起磁力 F は，$F = NI = 176$ [A] となります．また，環状鉄心の平均磁路長 l は

$$l = 2\pi\left(0.07 + \frac{0.09 - 0.07}{2}\right) = 0.503 \text{ [m]}$$

となります．したがって，磁界 H は式 (11.27) より

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{176}{0.503} = 349.9 \text{ [A/m]}$$

と求まります．
　次に，図 11.8 のフェライトの $B - H$ 曲線から，そのときの磁束密度 B を読み取ります．

$$H = 349.9 \text{ [A/m]} \quad \rightarrow \quad B = 0.35 \text{ [T]}$$

と磁束密度 B の値が得られます．そして，磁束 Φ は，式 (11.28) から

$$\Phi = BS = (0.35)\,(0.02)^2 = 1.4 \times 10^{-4} = 0.14 \text{ [mWb]}$$

と求まります．

▷ **11.4**　前問の環状鉄心に 2 [mm] の空隙を設けたとき，空隙のリラクタンスの値を求めなさい．

＜解答＞　空隙の見かけの面積 S_a は，式 (11.37) より

$$S_a = (0.02 + 0.002)^2 = 4.84 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

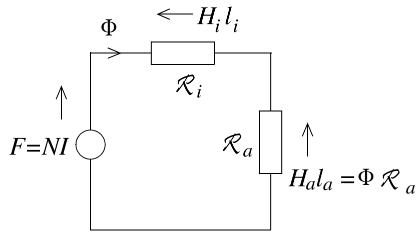
となり，また問題より空隙の距離は $l_a = 2 \times 10^{-3}$ [m] です．したがって，空隙のリラクランス $\mathcal{R}_a$ は，式 (11.30) から

$$\mathcal{R}_a = \frac{l_a}{\mu_0\, S_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})} = 3288.3 \times 10^3 \text{ [H}^{-1}\text{]}$$

と求まります．

▷ **11.5**　前問の空隙における磁束を 80 [μWb] とするためのコイルに流す電流を図 11.11(a) に示したのと同様な磁気回路から求めなさい．また，鉄心のリラクタンスも求め，空隙のリラクタンスと比較しなさい．

＜解答＞　問題の磁気回路は解図 11.1 のようになります．



解図11.1　演習問題11.5の磁気回路

空隙での NI 降下 $H_a l_a$ は式 (11.38) に示したように

$$\text{空隙の } NI \text{ 降下} = H_a l_a = \frac{l_a \Phi}{\mu_0 S_a} = \Phi\mathcal{R}_a = 80 \times 10^{-6} \times 3288.3 \times 10^3 = 263.1 \quad \text{[A]}$$

次に，鉄心での NI 降下 $H_i l_i$ を求めます．空隙を設けたため，鉄心の平均磁路長 l_i は

$$l_i = l - l_a = 2\pi\left(0.07 + \frac{0.09 - 0.07}{2}\right) - (2 \times 10^{-3}) = 0.501 \quad \text{[m]}$$

となります．また，空隙でも鉄心でも磁束は同じ値なので，鉄心内の磁束密度 B_i は

$$B_i = \frac{\Phi}{S_i} = \frac{80 \times 10^{-6}}{(0.02)^2} = 0.2 \quad \text{[T]}$$

ですから，図 11.8 のフェライトの $B - H$ 曲線から，そのときの鉄心の磁界 H_i を読み取れば

$$B_i = 0.2 \text{ [T]} \quad \rightarrow \quad H_i = 170 \text{ [A/m]}$$

となります．したがって，鉄心での NI 降下 $H_i l_i$ は

$$\text{鉄心の } NI \text{ 降下} = H_i l_i = 170 \times 0.501 = 85.2 \quad \text{[A]}$$

となり，磁気回路における閉路方程式は

$$F = NI = H_i l_i + H_a l_a = 85.2 + 263.1 = 348.3 \quad \text{[A]}$$

となるので，求める電流の値は

$$I = \frac{F}{N} = \frac{348.3}{100} = 3.48 \quad \text{[A]}$$

となります．また，鉄心のリラクタンスは $H_i l_i = \Phi\mathcal{R}_i$ から

$$\mathcal{R}_i = \frac{H_i l_i}{\Phi} = \frac{85.2}{80 \times 10^{-6}} = 1065.0 \times 10^3 \quad \text{[H}^{-1}\text{]}$$

となり，空隙の値に比べ，1/3 程度になります．

12 章 追加演習問題

▷ **12.2**　真空で磁界が $\boldsymbol{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_x$ [A/m] のときの電界 $\boldsymbol{E}$ を求めなさい．

＜解答＞ 真空中なので式 (10.17) のアンペアの法則の式の伝導電流は $\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{0}$ となり，変位電流 $\boldsymbol{J}_d = \partial \boldsymbol{D}/\partial t$（式 (10.16)）のみとなり，式 (10.17) は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

となります．したがって，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_m e^{j(\omega t + \beta z)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

ですから

$$\frac{\partial}{\partial z} H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y - \frac{\partial}{\partial y} H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_z = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$j\beta H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

となり，上式の両辺を t で積分して，電束密度 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} = \frac{\beta H_m}{\omega} e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y$$

となります．そして，電束密度と電界の関係は式 (4.12) から $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon_0$ ですから

$$\boldsymbol{E} = \frac{\beta H_m}{\varepsilon_0 \omega} e^{j(\omega t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y \quad [\mathrm{V/m}]$$

と電界 $\boldsymbol{E}$ が求まります．

▷ **12.3**　真空中で電界が $\boldsymbol{E} = 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_x$ [V/m]，磁界が $\boldsymbol{H} = H_m\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y$ [A/m] のとき，$\beta\,(> 0)$ と H_m の具体的な値を求め，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ を示しなさい．

＜解答＞　この問題は，本質的には 12.1 と同じ問題です．ただし，12.1 では $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{a}_y$ 方向で，$\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{a}_x$ 方向である点が異なっています．しかし，真空中での伝播速度は同じですから 12.1 の結果を利用して

$$c = \frac{\omega}{\beta} = 2.998 \times 10^8 \quad [\mathrm{m/s}] \quad \text{から}$$

$$\beta = \frac{10^8}{2.998 \times 10^8} = \frac{1}{2.998} = \frac{1}{3} \quad [\mathrm{rad/m}]$$

と β の値が求まりました．次に，H_m に関しては，ファラデーの法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$（式 (10.9)）を用います．まず，左辺は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} &= \nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y - \frac{\partial}{\partial y} 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_z = j\beta\, 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y
\end{aligned}
$$

となります．そして，右辺は

$$
-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_m e^{j(10^8 t + \beta z)}\, \boldsymbol{a}_y = -\mu_0\, j 10^8\, H_m\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y
$$

となりますから

$$
j\beta\, 30\pi\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y = -\mu_0\, j 10^8\, H_m\, e^{j(10^8 t + \beta z)} \boldsymbol{a}_y
$$

の関係から H_m の具体的な値は

$$
H_m = -\frac{\beta\, 30\pi}{\mu_0\, 10^8} = -\frac{(1/3) \cdot 30\pi}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^8} = -\frac{1}{4} \quad [\mathrm{A/m}]
$$

と求まります．したがって，電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= 30\pi\, e^{j(10^8 t + z/3)} \boldsymbol{a}_x \quad [\mathrm{V/m}] \\
\boldsymbol{H} &= -\frac{1}{4} e^{j(10^8 t + z/3)} \boldsymbol{a}_y \quad [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

となります．