

# 付録 C 素粒子物理と量子力学的効果

素粒子の世界を記述するためには量子力学が必要となる。本章では、本文の説明を理解するために役立つ量子力学の基本的事柄を、実用性を重視してまとめる。

本書では、付録 C のうち必要最小限の内容に絞って掲載をしています。  
付録 C の完全版は、以下の URL から入手可能です。

<http://www.morikita.co.jp/books/mid/015581>

## C.1 波動関数とその応用

### C.1.1 波動関数

素粒子の状態は波動関数  $\Psi(x)$  で表される。たとえば、電子  $e^-$  の波動関数は、

$$\Psi(x) = \psi_\alpha(x) |e^- \rangle \quad (C.1)$$

と表される。ここで  $|e^- \rangle$  は、C.1.2 項で説明するケットベクトルで、「この粒子は電子である」という意味をもつ。時空座標  $x$  に対する依存性や量子数  $\alpha$  は、その係数である  $\psi_\alpha(x)$  により表される。この  $\psi_\alpha(x)$  を振幅、あるいは単にこの部分だけを波動関数とよぶ。波動関数の絶対値の 2 乗は、量子数  $\alpha$  をもつ粒子のその時空点での存在確率密度になる。

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 = \langle e^- | \psi_\alpha^*(x) \psi_\alpha(x) | e^- \rangle = |\psi_\alpha(x)|^2 \langle e^- | e^- \rangle = |\psi_\alpha(x)|^2 \quad (C.2)$$

$|e^- \rangle$  は省略して  $\psi_\alpha(x)$  を波動関数として取り扱う場合も多い。

### C.1.2 ディラックのブラベクトル, ケットベクトル

ディラックは、素粒子の状態を記述するために、次のような便利なブラベクトル, ケットベクトルを導入した。

たとえば、スピン 1/2 の任意の状態は、スピンの上を向いた基本状態と下を向いた基本状態の重ね合わせ状態を表される。このような基本状態をケットベクトル “ $|\uparrow \rangle$ ” で

$$|\uparrow \rangle, |\downarrow \rangle \quad (C.3)$$

のように表す。スピン 1/2 の波動関数は、ケットベクトルを使い、次のように表す。

$$|\Psi \rangle = C_+ |\uparrow \rangle + C_- |\downarrow \rangle \quad (C.4)$$

この状態ベクトルの複素共役は、

## 2 付録 C 素粒子物理と量子力学的効果

$$|\Psi\rangle^* = (C_+ |\uparrow\rangle)^* + (C_- |\downarrow\rangle)^* = C_+^* \langle\uparrow| + C_-^* \langle\downarrow| = \langle\Psi| \quad (\text{C.5})$$

とブラケットル “ $\langle \quad |$ ” で表す. 波動関数の絶対値の 2 乗は,

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \langle\Psi|\Psi\rangle = [C_+^* \langle\uparrow| + C_-^* \langle\downarrow|][C_+ |\uparrow\rangle + C_- |\downarrow\rangle] \\ &= |C_+|^2 \langle\uparrow|\uparrow\rangle + |C_-|^2 \langle\downarrow|\downarrow\rangle + C_+^* C_- \langle\uparrow|\downarrow\rangle + C_-^* C_+ \langle\downarrow|\uparrow\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

になるが,

$$\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle^* = 0, \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1 \quad (\text{C.7})$$

のような規格直交関係があるため,

$$|\Psi|^2 = |C_+|^2 + |C_-|^2 \quad (\text{C.8})$$

を示すことができる. さらに, 規格直行関係 (C.7) を利用すると, 基本状態の係数を次のように取り出すことができる.

$$C_+ = \langle\uparrow|\Psi\rangle, \quad C_- = \langle\downarrow|\Psi\rangle \quad (\text{C.9})$$

これを利用すると, 波動関数は,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= C_+ |\uparrow\rangle + C_- |\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\Psi\rangle |\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\Psi\rangle |\downarrow\rangle \\ &= |\uparrow\rangle \langle\uparrow|\Psi\rangle + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|\Psi\rangle = (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

のように書くことができる.  $|\Psi\rangle$  の係数を比較すると,

$$|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| = 1 \quad (\text{C.11})$$

の関係があることがわかる. これを, この基本状態の完全性とよぶ.

ある基本状態のセットを加え合わせて, 別の基本状態のセットをつくることができる. たとえば, 任意の  $\theta$  に対して,

$$\begin{cases} |1\rangle \equiv \cos\theta |\uparrow\rangle + \sin\theta |\downarrow\rangle \\ |2\rangle \equiv -\sin\theta |\uparrow\rangle + \cos\theta |\downarrow\rangle \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

で定義される  $|1\rangle, |2\rangle$  は, 式 (C.7) と式 (C.11) の関係を満たし, 新しい基本状態であると考えることができる.

1 つの波動関数を, 異なる基本状態のセットを使って, まったく同等に記述することができる.

$$|\psi\rangle = C_1 |1\rangle + C_2 |2\rangle = C_+ |\uparrow\rangle + C_- |\downarrow\rangle \quad (\text{C.13})$$

このとき, 式 (C.12) の関係を使い, 係数の間に

$$\begin{cases} C_1 = \cos \theta C_+ + \sin \theta C_- \\ C_2 = -\sin \theta C_+ + \cos \theta C_- \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

と式 (C.12) に似た関係があることを示すことができる。

■ **基本状態の行列表現** 基本状態を、たとえば、

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle\uparrow| = (1 \quad 0), \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle\downarrow| = (0 \quad 1) \quad (\text{C.15})$$

のように行列に対応させることができる。この場合、式 (C.7) と式 (C.11) は自然に満たされる。式 (C.4) の波動関数とその複素共役式 (C.5) は、

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= C_+ |\uparrow\rangle + C_- |\downarrow\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} \\ |\Psi\rangle^* &= C_+^* \langle\uparrow| + C_-^* \langle\downarrow| \rightarrow (C_+^* \quad C_-^*) = \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

になる。逆に、行列で表された波動関数は、その成分を係数にもつ基本状態の和と考えることができる。

$$\Psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + \dots \quad (\text{C.17})$$

### C.1.3 波動関数の時間的发展

一般に我々が知りたいのは、初期状態  $\psi(0)$  を決めた場合、それが反応などを起こして、時間  $t$  後にどうなっているか ( $\psi(t)$ ) である。波動関数の時間微分は、ハミルトニアン  $H$  を使って、次のように与えられる。

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H\psi(t) \quad (\text{C.18})$$

そうすると、 $\psi(t)$  は、形式的には次で計算することができる。

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H\psi(t)dt \quad (\text{C.19})$$

ある状態が  $H\psi = E\psi$  を満足する場合、その一般解は、

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-iEt/\hbar} \quad (\text{C.20})$$

の形になる。この状態は、 $E$  という決まったエネルギーをもち、エネルギー固有状態とよばれる。我々は、素粒子を、静止エネルギーである質量で分類することが多いため、エネルギー

固有状態を知ることが特に重要である.

### C.1.4 平面波

エネルギー  $E$  と運動量  $\vec{p}$  をもつ, 静止質量  $m_0$  の自由粒子の平面波の波動関数は, 次のように表される.

$$\psi(x) = \exp[-i(Et - \vec{p}\vec{x})/\hbar] \psi(0) \quad (\text{C.21})$$

ただし,  $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$  である. これは,  $x = 0$  で波動関数が  $\psi(0)$  であるという境界条件を与えると, 任意の時空点での波動関数が, 式 (C.21) と決定されることを意味する. 平面波の存在確率密度は,

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = |\psi(0)|^2 \quad (\text{C.22})$$

なので, 時空点によらずどこでも一定である. いま,  $\vec{p}$  が  $x$  軸方向を向いているとすると, 式 (C.21) の波動関数は,

$$\psi(x) = e^{-i[(Et - px)/\hbar]} \psi(0) \quad (\text{C.23})$$

になる. この波動関数を  $x$  軸方向に  $\beta = cp/E$  の速度で運動している  $X'$  系から見ると, ローレンツ変換により, 位相は,

$$Et - px \xrightarrow{\beta=cp/E} E\gamma(t' + (\beta/c)x') - p\gamma(x' + c\beta t') = m_0 c^2 t' \quad (\text{C.24})$$

になり, 静止している質量  $m_0$  の粒子の波動関数の位相になる. つまり, 式 (C.23) の波動関数は質量  $m_0$  の粒子が  $x$  軸方向に

$$\beta = \frac{cp}{E} \quad (\text{C.25})$$

の速度で運動している状態に対応している.

### C.1.5 波束

平面波は, 空間的に一様に無限に広がっているが, 我々が取り扱う素粒子は, 空間的に非常に狭い領域に局在化している. このような素粒子の波動関数は, 運動量が少しずつ異なる平面波の重ね合わせであると考えることができる. 運動量が  $p_0$  を中心として  $p_0 \pm \delta p$  の狭い範囲にある平面波の重ね合わせ状態は, エネルギー  $E$  が運動量  $p$  の関数であることを考慮して,

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= N \int_{p_0 - \delta p}^{p_0 + \delta p} e^{-i[(E(p)t - px)/\hbar]} dp \xrightarrow{q=p-p_0} N \int_{-\delta p}^{+\delta p} e^{-i[E(p_0+q)t - (p_0+q)x]/\hbar} dq \\ &\sim N e^{-i[(E_0 t - p_0 x)/\hbar]} \int_{-\delta p}^{+\delta p} e^{i(\delta x q/\hbar)} dq \\ &= 2N e^{-i[(E_0 t - p_0 x)/\hbar]} \frac{\sin([\delta x \delta p]/\hbar)}{\delta x/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

と書ける。ただし、

$$E(p_0 + q) \sim E(p_0) + (dE/dp)q = E(p_0) + (c^2 p/E)q \equiv E_0 + v_G q \quad (\text{C.27})$$

を使い、 $\delta x = x - v_G t$  と定義した。規格化定数  $N$  は、

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_p(x)|^2 dx = 4N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin([(x - v_G t)\delta p]/\hbar)}{(x - v_G t)/\hbar} \right)^2 dx = 4\pi N^2 \hbar \delta p \quad (\text{C.28})$$

より、 $N = 1/(2\sqrt{\pi\hbar\delta p})$  なので、座標  $x$  での存在確率は、

$$P(x) = |\psi_p(x)|^2 = \frac{\delta p}{\pi\hbar} \left( \frac{\sin((\delta x \delta p)/\hbar)}{(\delta x \delta p)/\hbar} \right)^2 \quad (\text{C.29})$$

になる。この粒子の存在確率は、図 C.1 のように、 $x = v_G t$  のときに極大値をとり、空間的な幅  $\delta x \sim \hbar/\delta p$  をもつ山型の分布となる<sup>1</sup>。この存在確率は、速度  $v_G$  で運動している粒子に対応する。この  $v_G = c^2 p/E$  は、ローレンツ変換より求めた速度 (C.25) と一致する。このような状態を**波束**とよび、速度  $v_G$  を**群速度**とよぶ。式 (C.26) を見ると、波束の波動関数は、

$$\psi_p(x) = \left\{ e^{-i(E_0 t - p_0 x)} \right\} \times \left\{ \frac{\sin(\delta x \delta p)}{(\delta x \delta p)} \right\} \quad (\text{C.30})$$

平面波                      速度  $v_G$  で移動する山

の形をしている。普通、素粒子の波動関数として使っている平面波の波動関数は、この運動量  $p_0$  の平面波の部分で、山の部分は省略していると考えることができる。

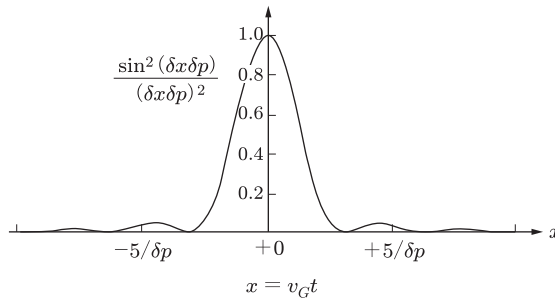


図 C.1 波束の空間分布  $x = v_G t$  にピークをもち、 $\delta x \sim 1/\delta p$  の幅をもつ。

## C.2 不確定性原理

波束の存在確率密度分布 (C.29) は、素粒子が  $\delta x \delta p \sim \hbar$  の広がりをもつことを示す。これは、運動量成分の広がり  $\delta p$  が小さいとき、空間的な広がり  $\delta x$  は大きく、その素粒子の位置

1 運動量分布が正規分布の場合は、波束の形も正規分布になる。

が  $\hbar/\delta p$  より正確に特定できず、逆に、素粒子の位置を  $\delta x$  の精度で特定できた場合、この状態の運動量の分布は  $\hbar/\delta x$  より広がっていたはずなので、それ以上の精度で運動量を特定することはできないことを意味する。これは、素粒子の位置と運動量を同時に決めることはできないことを意味し、ハイゼンベルグの**不確定性原理**とよぶ。

式 (C.26) で波束を導いたとき、計算を簡単にするために運動量分布は、 $p_0 - \delta p$  から  $p_0 + \delta p$  まで一様だと仮定した。より現実的に、運動量分布が標準偏差  $\sigma_p$  の正規分布をしているとすると、式 (C.29) に対応する波束の広がりも正規分布になり、その標準偏差  $\sigma_x$  と  $\sigma_p$  の関係は、

$$\sigma_x \sigma_p \sim \frac{\hbar}{2} \quad (\text{C.31})$$

になる。

取り扱っている対象が素粒子の場合、エネルギーと運動量、時間と位置の間に、 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ 、 $x = v_G t = (c^2 p/E)t$  の関係があるため、 $dE/dp = c^2 p/E$ 、 $dx/dt = c^2 p/E$  なので、運動量と位置の不確定性と関係づけると、

$$\sigma_t \sigma_E = \left( \frac{dt}{dx} \sigma_x \right) \left( \frac{dE}{dp} \sigma_p \right) = \left( \frac{E}{c^2 p} \sigma_x \right) \left( \frac{c^2 p}{E} \sigma_p \right) = \sigma_x \sigma_p \sim \frac{\hbar}{2} \quad (\text{C.32})$$

と、エネルギーと時間の間にも運動量と位置の間と同様の不確定性関係が存在する。たとえば、寿命が  $\tau$  の粒子の質量を測定しようとした場合、この粒子の存在を指定できる時間は  $\delta t \sim \tau$  なので、その質量は、原理的に  $\delta m c^2 \sim \hbar/2\tau$  の不定性をもつことになる。この質量測定を何回も繰り返し、質量  $m$  のヒストグラムをつくると  $\hbar/2\tau c^2$  の広がりをもった分布ができる。この幅は質量測定に原理的に伴うものなので、我々はこの素粒子の**質量が幅をもつ**と解釈するわけである。素粒子の質量の全幅 ( $\Gamma \equiv 2\delta m$ ) と寿命の間には次の関係がある。

$$\Gamma c^2 = \frac{\hbar}{\tau} \quad (\text{C.33})$$

### C.2.1 粒子の寿命と虚数質量

寿命  $\tau$  をもつ素粒子が最初  $N_0$  個あった場合、 $t$  秒後のこの素粒子の数は、

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (\text{C.34})$$

である。この関係を波動関数で表すと、

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-t/\tau} \quad (\text{C.35})$$

となるため、この粒子の波動関数は、

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-imc^2 t/\hbar} e^{-t/2\tau} = \psi(0) e^{-i(mc^2/\hbar - i/2\tau)t} \quad (\text{C.36})$$

と書くことができる。つまり、質量に虚数成分が存在する、

$$M = m - \frac{i\hbar}{2\tau c^2} \equiv m - i\frac{\Gamma}{2} \quad (\text{C.37})$$

と解釈することで、寿命が有限な素粒子の波動関数を表現することができる。この質量の虚数成分は、不確定性関係から導かれる質量幅に対応し、 $Z^0$  ボソンの質量幅を解析するとき使用されている。

## C.3 重ね合わせの状態と干渉

量子力学的効果が端的に現れる有名な 2 重スリット実験を考えることで振幅の重ね合わせ状態について紹介する。

まず、図 C.2 に示すように、左から、運動量  $k$  の電子ビーム（光子でもフラéronでもよい）が衝立  $Y$  に入射する場合を考える。電子源は十分遠くにあり、衝立  $Y$  に到達したときには平面波になっているとする。衝立  $Y$  には、 $2d$  だけ離れた場所に、細いスリット  $S_1, S_2$  が空いている。電子は、 $S_1$  または  $S_2$  を通過した後回折し、 $D$  だけ離れたスクリーン  $X$  に到達するとする。スクリーン  $X$  上の位置  $x$  に到達する電子は、 $S_1$  を通った場合、 $L_1 = \sqrt{D^2 + (d-x)^2} \sim D - xd/D$  だけ飛行するの必要があり、スクリーン上での波動関数は、

$$\psi_1 \propto e^{ikL_1} \sim e^{ik(D-xd/D)} \quad (\text{C.38})$$

になる。同様に、 $S_2$  を通った場合、飛行距離は、 $L_2 = \sqrt{D^2 + (d+x)^2} \sim D + xd/D$  なので、スクリーン上での同時刻の波動関数は、

$$\psi_2 \propto e^{ikL_2} \sim e^{ik(D+xd/D)} \quad (\text{C.39})$$

になる。電子が  $x$  で検出される確率は、2つの波動関数の和をとって 2 乗した、

$$P(x) = |\psi_1 + \psi_2|^2 \propto \cos^2\left(\frac{d}{D}kx\right) \quad (\text{C.40})$$

と表される。このため、スクリーン上では、 $\lambda = \pi D/(kd)$  の周期をもつ縞が見えることになる。 $P(x) = 0$  になる場所にはこの電子が到達しないわけではなく、行路差と運動量が  $(L_1 - L_2)k = \pi$  の関係になっているので、 $\psi_2(x) = -\psi_1(x)$  になるため、2つの波動関数が打ち消し合って  $P(x) = 0$  となっている。一方の穴を閉じると、打ち消しの効果がなくなり、 $P(x)$  は 0 でなくなる。

この効果は、素粒子物理では、始状態 ( $|i\rangle$ ) から終状態 ( $|f\rangle$ ) に進むとき、その途中で複数のプロセス ( $H_k$ ) を経る可能性があり、そのどのプロセスを経たかを原理的に知ることができない場合、おのおののプロセスを進む振幅を加え合わせてから絶対値の 2 乗をとって反応の確率を計算するという形で頻繁に登場する。

$$P \propto |\langle f|H_1|i\rangle + \langle f|H_2|i\rangle + \dots|^2 \quad (\text{C.41})$$

## C.4 基礎方程式

素粒子の波動関数の時空間内の発展は、非相対論的な運動方程式であるシュレディンガー方程式、スピンの振る舞いを規定するパウリ方程式、相対論的なボソンの時空発展を規定するクライン・ゴールドン方程式、相対論的なフェルミオンの時空発展を規定するディラック方程式などの基礎方程式により規定される。

基礎方程式は、古典的なエネルギーと運動量の関係を量子化して得られる。次項でシュレディンガー方程式を例に量子化のプロセスを復習し、次に、それを利用し相対論的な基礎方程式であるクライン・ゴールドン方程式とディラック方程式を導く。なお、式が複雑になるため、本節以降は自然単位系 ( $\hbar \rightarrow 1, c \rightarrow 1$ ) を使用する。

### C.4.1 シュレディンガー方程式

シュレディンガー方程式は、非相対論的なエネルギーと運動量の関係を量子化して得られる。量子化は次のような手続きで行う。

- ① 非相対論的なエネルギーと運動量とポテンシャルエネルギー  $U$  の関係を求める。

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U \tag{C.42}$$

- ② エネルギーと運動量を次のように時間と空間の微分で置き換える<sup>2</sup>。

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial z} \tag{C.43}$$

すると、次の微分演算子ができる。

$$i\frac{\partial}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2m}\nabla^2 + U \right] \tag{C.44}$$

- ③ ② でつくった微分演算子を波動関数  $\psi(t, \vec{x})$  に作用させる。

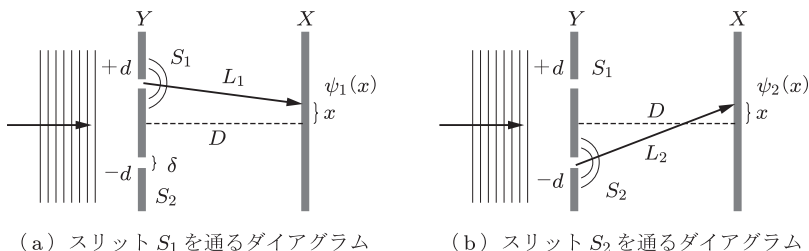


図 C.2 2重スリットによる電子の干渉実験

2 4元ベクトルの表記を使うと、エネルギー・運動量の部分の置き換えは、 $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$  と簡単に表現できる。空間ベクトル部分の符号に注意。



$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left[ -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + U \right] \psi(t, \vec{x}) \quad (\text{C.45})$$

これがシュレディンガー方程式である。

④ ③ でつくったシュレディンガー方程式を解いて  $\psi(t, \vec{x})$  を求め、その絶対値の 2 乗、

$$P = |\psi(t, \vec{x})|^2 \quad (\text{C.46})$$

をその素粒子の存在確率密度と解釈する。

ポテンシャルがない ( $U = 0$ ) 自由空間の場合、式 (C.45) の平面波解は次のようになる。

$$\psi_S(t, \vec{x}) = \exp[-i(Et - \vec{p}\vec{x})] \psi_S(0, \vec{0}) \quad (\text{C.47})$$

ただし、 $E$  は運動エネルギーである。

$U$  が静電ポテンシャル、 $U(\vec{x}) = -\alpha/|\vec{x}|$  で、 $E + U < 0$  のとき、式 (C.45) は、水素原子中の電子のシュレディンガー方程式になる。一般に、この束縛状態の解は、

$$\psi_H(t, \vec{x}) = R_{n\ell}(|\vec{x}|) Y_\ell^{m_z}(\theta, \phi) e^{-iE_n t} \quad (\text{C.48})$$

になることが知られている。 $Y_\ell^{m_z}$  は球面調和関数で、 $\ell$  は軌道角運動量、 $m_z$  はその  $z$  成分を表す量子数である。

$$Y_\ell^{m_z}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^{m_z}(\theta, \phi) \quad (\text{C.49})$$

という関係式はよく使われるので、ここで紹介しておく。 $n$  は動径方向の励起を表す量子数で、静電ポテンシャルのように  $U$  が  $|\vec{x}|$  に反比例するときは、エネルギーは  $\ell$ 、 $m_z$  には依存しない。シュレディンガー方程式の解の球面調和関数の部分は、メソン中のクォークの波動関数でも同じである。

$E + U > 0$  のときは、散乱の状態になり、C.7.1 項で説明するように、シュレディンガー方程式を使用してラザフォード散乱断面積を求めることができる。

## C.4.2 クライン・ゴールドン方程式

相対論的なエネルギーと運動量の関係

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{C.50})$$

を ①～③ の手続きで量子化すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_K = [\vec{\nabla}^2 - m^2] \phi_K \quad (\text{C.51})$$

になる。これをクライン・ゴールドン方程式とよび、ボソンに対する基礎方程式となる。この平面波解は、

$$\phi_K(x) = \exp[-i(Et - \vec{p}\vec{x})] \quad (\text{C.52})$$

になる。次に行うことは、粒子の描像を得るために、連続の式を満足する 4 元ベクトル  $j^\mu$  を求めることである。

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{C.53})$$

これを領域  $V$  で体積積分して、ガウスの定理を使うと次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V j^0 d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{C.54})$$

ただし、 $S$  は  $V$  を囲む表面で、 $d\vec{S}$  は面積積分を表す。この関係は、たとえば領域  $V$  の中にある  $j^0$  という量が減った場合、その量は  $\vec{j}$  という流れにより表面  $S$  を通して出る量に等しいことを意味する。したがって、 $j^\mu$  は、存在確率が保存する粒子としての描像を示す。クライン・ゴールドン方程式 (C.51) を満たす  $\phi_K$  に対しては、一般に、

$$j^\mu = i(\phi_K^* \partial^\mu \phi_K - \phi_K \partial^\mu \phi_K^*) \quad (\text{C.55})$$

の場合、連続の式 (C.53) を満たすことを示すことができる。試みに、式 (C.52) を入れてみると、

$$j^\mu = 2(E, \vec{p}) \quad (\text{C.56})$$

になる。

### C.4.3 ディラック方程式

相対論的なエネルギーと運動量の関係式 (C.50) は、行列を用いて次のように「因数分解」することができる。

$$(\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m)(\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} - m) = 0 \quad (\text{C.57})$$

$\gamma_\mu$  は、次の関係を満たす  $4 \times 4$  の行列である。

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} I; \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{C.58})$$

$\gamma^\mu$  は一意には決まらないが、本書では、ディラックの表現とよばれる次の表現を使う。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.59})$$

$I$  は  $2 \times 2$  の単位行列、 $\vec{\sigma}$  はパウリのスピン行列で、次のように表される。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.60})$$

さらに,

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.61})$$

も弱い相互作用などで頻繁に使われるので、ここで定義しておく。

ディラック方程式は、式 (C.57) の右側の括弧が 0 になる場合を量子化したものである。

$$\left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right] \psi_D = 0 \quad (\text{C.62})$$

テンソル式で書くと,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (\text{C.63})$$

となる。ディラック方程式は重要なので、少し詳しく説明する。

■ 自由粒子の平面波解      ディラック方程式を行列で表すと,

$$\begin{pmatrix} i\partial_0 - m & i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -i\partial_0 - m \end{pmatrix} \psi(x) = 0 \quad (\text{C.64})$$

となる。なお、この行列の各要素も  $2 \times 2$  の行列である。ディラック方程式を満足する平面波の波動関数を求めるため、 $p = (p_0, \vec{p})$  として,

$$\psi(x) = we^{-ipx} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{-i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (\text{C.65})$$

とおいてみると、式 (C.64) は、 $u$ 、 $v$  に対する次の連立方程式になる。

$$\begin{cases} (p_0 - m)u - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})v = 0 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u - (p_0 + m)v = 0 \end{cases} \quad (\text{C.66})$$

これから  $v$  を消去すると、 $p_0 \neq -m$  のとき<sup>3</sup>,

$$(p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)u = 0 \quad (\text{C.67})$$

さらに、 $u \neq 0$  のとき<sup>4</sup>,

$$p_0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \equiv \pm E \quad (\text{C.68})$$

3  $p_0 = -m$  のとき、 $(u, v) = (0, 0)$ 。これは、この時空にこの粒子が存在しないという解なので、以後取り扱わない。

4  $u = 0$  のとき  $(u, v) = (0, 0)$  なので、以後取り扱わない。

であればよい。これはエネルギーが正と負の2つの解があることを意味する。そこで、粒子が静止している場合の質量も正と負があるとして、その静止状態の波動関数  $e^{\pm imt}$  を速度  $-\vec{\beta}$  で移動している系から見ると、ローレンツ変換より、

$$e^{\pm imt} \rightarrow e^{\pm i(\gamma mt - \gamma m \vec{\beta} \vec{x})} = e^{\pm i(Et - \vec{p} \vec{x})}; \quad E = \gamma m, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{\beta} \quad (\text{C.69})$$

なので、

$$m \rightarrow (E, \vec{p}), \quad -m \rightarrow (-E, -\vec{p}) \quad (\text{C.70})$$

に対応する。このとき、式 (C.66) から、 $\vec{\eta} \equiv \vec{p}/(E+m)$  として、

$$p_0 = +E \text{ のとき, } \quad v = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} u \quad \Rightarrow \quad w_+ = \begin{pmatrix} u \\ (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) u \end{pmatrix} \quad (\text{C.71})$$

$$p_0 = -E \text{ のとき, } \quad u = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} v \quad \Rightarrow \quad w_- = \begin{pmatrix} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) v \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{C.72})$$

であることを示すことができる。 $w_{\pm}$  は4つの成分をもつため、4成分スピノールとよぶ。この2つの解の和もディラック方程式を満たすため、結局、自由なディラック方程式の一般解は、

$$\psi(x) = w_+ e^{-ipx} + w_- e^{ipx} \quad (\text{C.73})$$

になる。物理的には、負エネルギー状態は時間を逆行し、正エネルギーの反粒子として認識される。

$u, v$  の大きさは、規格化条件から決定する。規格化にはさまざまな方法があるが、本書では次のように定義する。相対論的に運動している系の密度は、ローレンツ収縮により、静止している場合のローレンツ係数 ( $\gamma$ ) 倍になる。そのため、確率密度が  $\gamma = E/m$  になるようにとる。式 (C.73) の正エネルギー解の場合、

$$\gamma = \frac{1}{V} \int_V |\psi|^2 d^3x = \frac{1+\eta^2}{V} \int_V |u|^2 d^3x = (1+\eta^2)|u|^2 \quad (\text{C.74})$$

これより、

$$|u|^2 = \frac{\gamma}{1+\eta^2} = \frac{E+m}{2m} \quad (\text{C.75})$$

規格化係数を前に出して、

$$u = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \hat{u} \equiv N \hat{u} \quad (\text{C.76})$$

と書く場合もある。ただし、 $|\hat{u}|^2 = 1$  である。

■ 4元カレント　ディラック方程式 (C.63) の解  $\psi$  を使って、次のように定義された  $j^\mu$

$$j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu\psi \quad (\text{C.77})$$

は、一般に連続の式 (C.53) を満足する。試みに、正エネルギーの平面波解を入れてみると、

$$j^\mu = \gamma(1, \vec{\beta}) \quad (\text{C.78})$$

になる。

#### C.4.4 電磁相互作用

標準理論では、電磁相互作用はゲージ対称性からディラック方程式に入れられる。ここでは、古典電磁気学との対応原理から電磁相互作用を導入してみる。

■ **ディラック方程式と電磁相互作用** 古典電磁力学では、運動方程式中の運動量を

$$p \rightarrow p - eA \quad (\text{C.79})$$

と置き換えることにより、電荷  $e$  の質点の運動方程式に電磁相互作用を入れることができた。同様に、式 (C.43) に対応し、ディラック方程式で、

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu \quad (\text{C.80})$$

と置き換えることにより、次のように電磁相互作用をディラック方程式に入れることができる。

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - eA^\mu) - m]\psi = 0 \quad (\text{C.81})$$

■ **クライン・ゴールドン方程式と電磁相互作用** マクスウェル方程式を電磁ポテンシャルで表すと、クーロンゲージ ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) の場合、次のようになる。

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = j^\nu \quad (\text{C.82})$$

ここで、 $j^\nu$  は荷電粒子が運動することによる電流を表し、 $j^\nu = e[\bar{\psi}\gamma^\nu\psi]$  と対応づけることができる。したがって、電磁ポテンシャルのマクスウェル方程式をクライン・ゴールドン方程式と対応づけて、次のようになる。

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = e[\bar{\psi}\gamma^\nu\psi] \quad (\text{C.83})$$

これらの方程式は、ゲージ対称性を満たし、電磁相互作用を正しく扱うことができる。

#### C.4.5 ディラック方程式と低エネルギーでの電磁相互作用

■ **ディラックフェルミオンの磁気双極子モーメント** 電磁相互作用の入ったディラック方程式 (C.81) の非相対論的近似を行うと、

$$\left\{ \frac{1}{2m}(-i\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + \frac{e}{2m}[\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})] - eA^0 \right\} \psi = (E - m)\psi \quad (\text{C.84})$$

になる [b1].  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  に注意すると, 第 2 項は, 次のような形をしている.

$$H_P = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{C.85})$$

これは, 磁場と磁気モーメントとの相互作用によるポテンシャルエネルギーに対応し, このフェルミオンが

$$\mu = \frac{e}{2m} \quad (\text{C.86})$$

の大きさの磁気モーメントをもつことを示す.  $m$  が電子の質量の場合,  $\mu_B = e/(2m_e)$  のことをボーア磁子とよび, 陽子の質量の場合,  $\mu_N = e/(2m_p)$  を核磁子とよぶ. 本書ではボーア磁子は, ポジトロニウムのエネルギーレベルの議論で使用され, 核磁子は, バリオンの磁気双極子モーメントの評価で使用される.

### C.4.6 パウリ方程式と 2 成分状態

$m = m_e$  のとき, 式 (C.84) の左辺の 2 番目の部分は, 磁場中の電子のスピン振る舞いを表し, パウリ方程式とよばれる. 磁場を  $\vec{B} = B(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  とすると, パウリ方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \psi &= \mu_B (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \psi = \mu_B \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \psi \\ &= \mu_B B \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \psi \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

この運動方程式の形は, 磁場中のスピンに限らず, さまざまな 2 状態系で出てくるため, ここで少し詳しく説明する. まず, 基本状態はスピン上向き  $|\uparrow\rangle$  と下向き  $|\downarrow\rangle$  の 2 つあり, 一般の状態の波動関数を

$$\psi(t) = C_{\uparrow}(t) |\uparrow\rangle + C_{\downarrow}(t) |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} C_{\uparrow}(t) \\ C_{\downarrow}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{C.88})$$

と書く. いま, 簡単のため, 磁場が  $x$  方向を向いているとすると,  $\vec{B} = (B, 0, 0)$  になり, このとき, 式 (C.87) のパウリ方程式は次の連立微分方程式になる.

$$\begin{cases} i\dot{C}_{\uparrow} = \mu_B B C_{\downarrow} \\ i\dot{C}_{\downarrow} = \mu_B B C_{\uparrow} \end{cases} \quad (\text{C.89})$$

これは磁場のため, スピンの方向が反転 ( $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ ) することを意味する. この一般解は, 次のようになる.

$$C_{\uparrow}(t) = \alpha e^{-i\mu_B B t} + \beta e^{i\mu_B B t}, \quad C_{\downarrow}(t) = \alpha e^{-i\mu_B B t} - \beta e^{i\mu_B B t} \quad (\text{C.90})$$

ただし  $\alpha, \beta$  は積分定数である. したがって波動関数 (C.88) は, 一般に次のようになる.

$$\psi(t) = \alpha(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)e^{-i\mu_B B t} + \beta(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)e^{i\mu_B B t} \quad (\text{C.91})$$

これから,

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.92})$$

がそれぞれエネルギー  $\pm\mu_B B$  をもつエネルギー固有状態であることがわかる. 一方, この状態はスピンの  $\pm x$  方向を向いている状態でもあるため, スピンが  $\pm x$  方向を向いている状態は, スピンが  $\pm z$  方向を向いている基本状態の重ね合わせ状態であることを意味する.

次に, 磁場の成分が  $x-z$  平面内にある場合,  $\phi = 0$  になり, 式 (C.87) のパウリ方程式は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_{\uparrow} \\ C_{\downarrow} \end{pmatrix} = \mu_B B \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\uparrow} \\ C_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (\text{C.93})$$

と書くことができる. この場合, 次の状態

$$\psi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} e^{-i\mu_B B t}, \quad \psi_-(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} e^{i\mu_B B t} \quad (\text{C.94})$$

が, エネルギー  $\pm\mu_B B$  のエネルギー固有状態である.  $|\pm\rangle$  を

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{C.95})$$

と定義すると,  $|\pm\rangle$  はエネルギー  $\pm\mu_B B$  をもつ基本状態であり, スピンが磁場  $\vec{B}$  と平行と反平行の状態である. これらを用いて, 任意の時間での波動関数は,

$$\psi(t) = C_+(0)|+\rangle e^{-i\mu_B B t} + C_-(0)|-\rangle e^{i\mu_B B t} \quad (\text{C.96})$$

と表すことができる.

■ 振動    もし  $t = 0$  で  $|\uparrow\rangle$  であったとすると, 式 (C.96) の初期条件

$$\begin{aligned} \psi(0) = |\uparrow\rangle &= [\cos(\theta/2)C_+(0) - \sin(\theta/2)C_-(0)]|\uparrow\rangle \\ &+ [\sin(\theta/2)C_+(0) + \cos(\theta/2)C_-(0)]|\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

より, 係数は,  $C_+(0) = \cos(\theta/2)$ ,  $C_-(0) = -\sin(\theta/2)$  と決定される. このとき, 波動関数 (C.96) は,

$$\psi(t) = [\cos^2(\theta/2)e^{-i\mu_B B t} + \sin^2(\theta/2)e^{i\mu_B B t}]|\uparrow\rangle - i \sin \theta \sin(\mu_B B t)|\downarrow\rangle \quad (\text{C.98})$$

になる. 時刻  $t$  に  $|\downarrow\rangle$  である確率は,

$$P(t; \uparrow \rightarrow \downarrow) = |\langle \downarrow | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2 \theta \sin^2(\mu_B B t) \quad (\text{C.99})$$

となる. 式 (C.99) は, 最初  $|\uparrow\rangle$  から始まっても時間とともに  $|\downarrow\rangle$  が生じ, その確率は, 振幅  $\sin^2\theta$ , 角速度  $2\mu_B B$  で振動することを示している. これは, 磁場中でスピンの磁場と垂直な平面内で歳差運動をしていることを表す.

■ 一般的な場合 パウリ方程式を一般化すると, 質量エネルギーまで含めて,

$$i \frac{d}{dt} \psi = \left[ m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu B \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right] \psi \quad (\text{C.100})$$

になる. ここで,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.101})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

に注目すると, エネルギー固有状態と対応するエネルギーは, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{pmatrix}, \quad E_{\pm} = m \pm \mu B \quad (\text{C.102})$$

本書では,  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ ,  $d' \leftrightarrow s'$ ,  $\nu_e \leftrightarrow \nu_{\mu}$ ,  $|u\bar{u}\rangle \leftrightarrow |d\bar{d}\rangle$ ,  $|ud\rangle \leftrightarrow |du\rangle$ ,  $B \leftrightarrow W_3$  などさまざまな 2 状態間の遷移を取り扱っているが, これまでのパウリ方程式の議論と対応づけることで, それらのエネルギー固有状態やエネルギーを知ることができる.

2 状態系  $(\alpha, \beta)$  の一般的な運動方程式は, 次のように書くことができる.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \tau e^{-i\phi} \\ \tau e^{i\phi} & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{C.103})$$

ただし,  $\mu_i, \tau, \phi$  は実数とする. 式 (C.100) と比較すると, 次のように対応づけることができる.

$$m = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad \tan\theta = \frac{2\tau}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \mu B = \sqrt{\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (\text{C.104})$$

したがって, 運動方程式 (C.103) から導かれるエネルギー固有状態, 混合角およびエネルギーは,

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha\rangle \\ |\beta\rangle \end{pmatrix}, \quad \tan\theta = \frac{2\tau}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (\text{C.105})$$

$$E_{\pm} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

になる. これは,



$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.106})$$

が、 $(\theta, \phi)$  方向を向いたスピン 1/2 の波動関数であることを意味する。全体の複素位相の自由度があるため、 $e^{-i\phi/2}$  をかけ、

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i(\phi/2)} \cos(\theta/2) \\ e^{i(\phi/2)} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.107})$$

と、角度に関して対称性がよい表現を使うこともある。この波動関数を  $360^\circ$  回転すると、たとえば、

$$|+\rangle \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta + 360^\circ} -|+\rangle \quad (\text{C.108})$$

のように、元に戻らず符号が変化するという興味深い性質がある。

#### C.4.7 スピンが 2 つある状態：磁気双極子相互作用

強い相互作用による「磁気」双極子相互作用は、スピンの異なるハドロン の 質 量 の 違 い の 原因になっている。2.3.2 項の議論から、フェルミオン 1 と 2 の間の磁気双極子相互作用の運動方程式は、次で表される。

$$i\dot{\psi} = -K(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2)\psi = -K\mu_1\mu_2(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\psi \quad (\text{C.109})$$

波動関数は 4 つの基本状態からなり、次のように表す。

$$\psi(t) = C_1(t)|\uparrow\uparrow\rangle + C_2(t)|\uparrow\downarrow\rangle + C_3(t)|\downarrow\uparrow\rangle + C_4(t)|\downarrow\downarrow\rangle \quad (\text{C.110})$$

ここで、1 つ目のスピンはフェルミオン 1 のスピン、2 つ目はフェルミオン 2 のスピンである。式 (C.109) 中のハミルトニアンを具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)|\uparrow\uparrow\rangle &= \sigma_x|\uparrow\rangle\sigma_x|\uparrow\rangle + \sigma_y|\uparrow\rangle\sigma_y|\uparrow\rangle + \sigma_z|\uparrow\rangle\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)|\uparrow\downarrow\rangle &= \sigma_x|\uparrow\rangle\sigma_x|\downarrow\rangle + \sigma_y|\uparrow\rangle\sigma_y|\downarrow\rangle + \sigma_z|\uparrow\rangle\sigma_z|\downarrow\rangle = 2|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

となり、同様に

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)|\downarrow\uparrow\rangle = 2|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \quad (\text{C.112})$$

となる。したがって、運動方程式 (C.109) は、次のような 4 つの方程式で書くことができる。

$$\dot{C}_1 = -iAC_1, \quad i\dot{C}_4 = -iAC_4, \quad \begin{pmatrix} \dot{C}_2 \\ \dot{C}_3 \end{pmatrix} = -iA \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.113})$$

ただし、 $A \equiv K\mu_1\mu_2$  である。 $C_1, C_4$  についてはただちに解くことができ、

$$C_1(t) = C_1(0)e^{-iAt}, \quad C_4(t) = C_4(0)e^{-iAt} \quad (\text{C.114})$$

となる。\$C\_2, C\_3\$ については、式 (C.100) の解を借りてくればよい。2つの運動方程式を見比べて、対応関係は、

$$\mu_1 = \mu_2 \rightarrow -A, \quad \tau \rightarrow 2A, \quad \phi \rightarrow 0, \quad |\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \rightarrow |\downarrow\uparrow\rangle \quad (\text{C.115})$$

なので、\$\theta = \pi/2\$ であり、質量固有状態は、

$$\psi_+(t) = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} e^{-iAt}, \quad \psi_-(t) = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} e^{i3At} \quad (\text{C.116})$$

になる。したがって、波動関数 (C.110) は、\$C\_{\pm}\$ を適当な定数として、

$$\psi(t) = \left( C_1(0) |\uparrow\uparrow\rangle + C_+ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + C_4(0) |\downarrow\downarrow\rangle \right) e^{-iAt} + C_- \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} e^{i3At} \quad (\text{C.117})$$

と書ける。\$|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, |\downarrow\downarrow\rangle\$ は、同じエネルギー \$A\$ をもつエネルギー固有状態で、自由度が3なので、3重項 (triplet) とよばれ、合成スピン = 1 に対応する。一方、\$\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\$ は、エネルギー \$-3A\$ をもつエネルギー固有状態で、自由度は1でスカラー (scalar) とよばれ、合成スピン = 0 に対応する。

## C.5 素粒子の交換関係

### C.5.1 パウリの排他原理とフェルミオンの交換関係

パウリの排他原理は、「同一状態 (たとえばスピンの向き) の同一フェルミオン (たとえば電子) は同じ状態 (たとえば水素原子の1S軌道) を同時に占めることはできない」というものである。この性質は、スピン方向 \$s\_1, s\_2\$ の2つの電子の波動関数が、

$$\Psi(e^-(s_1), e^-(s_2)) = \frac{|e^-(s_1)e^-(s_2)\rangle - |e^-(s_2)e^-(s_1)\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.118})$$

であれば、満足することができる。ここで、\$|\alpha\beta\rangle\$ は、位置 \$\vec{r}\_1\$ に粒子 \$\alpha\$ が存在し、\$\vec{r}\_2\$ に粒子 \$\beta\$ が存在する状態を表し、\$|\beta\alpha\rangle\$ は、その逆の状態である。\$\Psi(\beta, \alpha)\$ は、\$\Psi(\alpha, \beta)\$ の2つの粒子を交換した状態を表す。

2つのスピンの両方とも上向き (\$\uparrow\$) の電子の波動関数は、式 (C.118) の \$s\_1, s\_1\$ に \$\uparrow\$ を入れて、

$$\Psi(e^-(\uparrow), e^-(\uparrow)) = \frac{|e^-(\uparrow)e^-(\uparrow)\rangle - |e^-(\uparrow)e^-(\uparrow)\rangle}{\sqrt{2}} = 0 \quad (\text{C.119})$$

になり、この状態は許されない。これがパウリの排他原理である。

スピンの向きが異なる場合 (\$s\_1 = \uparrow, s\_2 = \downarrow\$) の波動関数は、

$$\Psi(e^-(\uparrow), e^-(\downarrow)) = \frac{|e^-(\uparrow)e^-(\downarrow)\rangle - |e^-(\downarrow)e^-(\uparrow)\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |e^-e^-\rangle \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.120})$$

になり、この状態は存在できる。ここで、右辺の最後の項は、「電子である」という状態 ( $|e^-\rangle$ ) と、「スピンの向き」の状態 (たとえば  $|\uparrow\rangle$ ) を分離して書き ( $|e^-(\uparrow)\rangle = |e^-\rangle|\uparrow\rangle$ )、「因数分解」したものである。このように書くと、表現が簡略化され、この状態の合成スピンは  $S=0$  であることがすぐにわかるなど便利である。

以上のことは、パウリの排他原理により、2つの電子の波動関数は単純な  $|e^-(s_1)e^-(s_2)\rangle$  ではなく、常に式 (C.118) のような重ね合わせ状態になっていることを意味する<sup>5</sup>。また、この状態は一般に質量固有状態でもある。この考え方を一般化すると、任意のフェルミオン  $\alpha$  とフェルミオン  $\beta$  の波動関数は、

$$|\Psi_-(\alpha, \beta)\rangle = \frac{|\alpha\beta\rangle - |\beta\alpha\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.121})$$

になる。この状態は、

$$|\Psi_-(\beta, \alpha)\rangle = -|\Psi_-(\alpha, \beta)\rangle \quad (\text{C.122})$$

のように2つのフェルミオンを交換すると、波動関数の符号が変化する(反対称性)という一般的な性質をもち<sup>6</sup>、逆にこの関係を要請することで、波動関数の構造を決定することが多い。

## C.5.2 ボソンの交換関係

ボソンのスピンは整数であり、メソンが2つのクォークからできているように、ボソンは2つのフェルミオンからできていると考えることができる。A, B をボソンとして、その波動関数をそれぞれ、 $\psi_A = \Psi(\alpha_1, \alpha_2)$ 、 $\psi_B = \Psi(\beta_1, \beta_2)$  で表すとする。ここで、 $\alpha_i, \beta_i$  はフェルミオンである。A, B, 2つのボソンの系の波動関数を、

$$\Psi(A, B) = \Psi(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) \quad (\text{C.123})$$

と書くと、これは4つのフェルミオンの波動関数と解釈できる。式 (C.122) の関係から2つのフェルミオンを交換すると波動関数の符号が変わるため、

$$\begin{aligned} \Psi(A, B) &= \Psi(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) = -\Psi(\beta_1, \alpha_2; \alpha_1, \beta_2) = \Psi(\beta_1, \beta_2; \alpha_1, \alpha_2) \\ &= +\Psi(B, A) \end{aligned} \quad (\text{C.124})$$

つまり、2つのボソンを交換しても波動関数の符号は変わらない。この場合、式 (C.121) に対応して

5 これからしばらくの間は、2つの粒子間の軌道角運動量が  $\ell=0$  の場合を考える。

6 ファインマン<sup>[b14]</sup>によると、2つの粒子を交換することは、一方の粒子を他方の粒子に対して  $360^\circ$  回転することと同等であり、その結果、波動関数の符号は、式 (C.108) の関係から逆転すると説明されている。

$$\Psi_+(A, B) = \frac{|AB\rangle + |BA\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.125})$$

であると考えることができる。

### C.5.3 電子対のパリティ

C.5.1 項で議論した、 $\ell = 0$  の状態の電子対の波動関数は、次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} |\Psi_-(e^-(\uparrow), e^-(\uparrow))\rangle &= 0 \\ |\Psi_-(e^-(\uparrow), e^-(\downarrow))\rangle &= \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} |e^-e^- \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

パリティ変換をすると、

$$P|\Psi_-(e^-, e^-)\rangle = |\Psi_-((+e^-), (+e^-))\rangle = +|\Psi_-(e^-, e^-)\rangle \quad (\text{C.127})$$

なので、パリティは正 ( $P = +1$ ) である。

### C.5.4 陽子-中性子対の場合

$\ell = 0$  の  $pn$  系の波動関数は、合成スピンの  $S = 1$  のとき、反対称性 (C.122) から、

$$|\Psi_{S=1}(p, n)\rangle = \frac{|pn\rangle - |np\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.128})$$

になる。陽子と中性子を「核子  $N$ 」という粒子のアイソスピンが異なった状態と解釈すると、

$$|p\rangle = |N\rangle |\uparrow\rangle_I, \quad |n\rangle = |N\rangle |\downarrow\rangle_I \quad (\text{C.129})$$

のように書ける。すると、式 (C.128) の波動関数は、

$$|\Psi_{S=1}(p, n)\rangle = |NN\rangle \frac{|\uparrow\downarrow\rangle_I - |\downarrow\uparrow\rangle_I}{\sqrt{2}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.130})$$

のように書ける。つまり、この状態はアイソスピン  $I = 0$  で、重陽子はこの状態であると考えることができる。

固有スピンの  $S = 0$  のとき、固有スピン部分の波動関数は、 $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$  になるため、全体の波動関数を反対称にするためには、 $|pn\rangle$  部分の波動関数は対称でなければならない。

$$|\Psi_{S=0}(p, n)\rangle = \frac{|pn\rangle + |np\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = |NN\rangle \frac{|\uparrow\downarrow\rangle_I + |\downarrow\uparrow\rangle_I}{\sqrt{2}} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.131})$$

したがって、この状態は（束縛状態は観測されていないが）アイソスピン  $I = 1$  である。

### C.5.5 フェルミオン-反フェルミオン対の場合

$\ell = 0$  の  $f\bar{f}$  対は素粒子物理によく登場する。まず電子と陽電子の系を考える。電子-陽電

子の合成スピンの  $S = 1$  の場合,  $f\bar{f}$  系の波動関数は,

$$|\psi_{S=1}(f, \bar{f})\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\bar{f}\bar{f}\rangle - |\bar{f}f\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.132})$$

であると考えられる. 合成スピンの  $S = 0$  の場合の波動関数は,

$$|\psi_{S=0}(f, \bar{f})\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\bar{f}\bar{f}\rangle + |\bar{f}f\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.133})$$

になる. フェルミオンのパリティを正とした場合, 反フェルミオンのパリティは負になるので,

$$P|f\rangle = +|f\rangle, \quad P|\bar{f}\rangle = -|\bar{f}\rangle \quad (\text{C.134})$$

したがって,

$$P|\psi_{S=0,1}(f, \bar{f})\rangle = |\psi_{S=0,1}((+1)f, (-1)\bar{f})\rangle = -|\psi_{S=0,1}(f, \bar{f})\rangle \quad (\text{C.135})$$

と  $\ell = 0$  のポジトロニウムのパリティは, 合成スピンによらず  $P = -1$  になる.  $C$  変換は,  $f$  と  $\bar{f}$  を次のように変換する.

$$C|f\rangle = |\bar{f}\rangle, \quad C|\bar{f}\rangle = |f\rangle \quad (\text{C.136})$$

そのため  $f\bar{f}$  系の変換は,

$$\begin{aligned} C|\psi_{S=1}(f, \bar{f})\rangle &= \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\bar{f}f\rangle + |f\bar{f}\rangle}{\sqrt{2}} = +|\psi_{S=1}(f, \bar{f})\rangle \\ C|\psi_{S=0}(f, \bar{f})\rangle &= \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|\bar{f}f\rangle - |f\bar{f}\rangle}{\sqrt{2}} = -|\psi_{S=0}(f, \bar{f})\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.137})$$

になり,  $\psi_{S=1}$  の  $C$  パリティは正,  $\psi_{S=0}$  の  $C$  パリティは負である.

表 C.1 に  $\ell = 0$  の  $e^-e^-$ ,  $pn$ ,  $f\bar{f}$  対の状態とその量子数をまとめる.

表 C.1  $\ell = 0$  の  $e^-e^-$ ,  $pn$ ,  $f\bar{f}$  系の状態と量子数

粒子対	$S$	構造	$P$	$C$	$CP$	$I$	備考
$e^-e^-$	0	$ e^-e^- \rangle$	+1	×	×	×	He の軌道電子
	1	禁止	×	×	×	×	パウリの排他原理
$pn$	0	$( pn\rangle +  np\rangle)/\sqrt{2}$	+1	×	×	1	束縛状態は観測されない
	1	$( pn\rangle -  np\rangle)/\sqrt{2}$	+1	×	×	0	重陽子
$f\bar{f}$	0	$( \bar{f}f\rangle +  f\bar{f}\rangle)/\sqrt{2}$	-1	+1	-1	×	$p$ -Ps, $\pi^0$ , $\eta$ , $\eta'$ , $\eta_C$ , $\eta_B$
	1	$( \bar{f}f\rangle -  f\bar{f}\rangle)/\sqrt{2}$	-1	-1	+1	×	$o$ -Ps, $\rho^0$ , $\omega$ , $\phi$ , $J/\psi$ , $\Upsilon$

### C.5.6 $\pi$ メソン対の場合

$\pi$  メソンのスピンは 0 なので,  $\ell = 0$  の  $2\pi$  系の許される状態は,  $\pi_i$  を  $\pi^\pm$ ,  $\pi^0$  のいずれかとして,

$$|\Psi_+(\pi_1\pi_2)\rangle = \frac{|\pi_1\pi_2\rangle + |\pi_2\pi_1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.138})$$

の構造をしている.  $\pi_1$  と  $\pi_2$  が同種粒子 ( $\pi_i$ ) の場合

$$|\Psi_+(\pi_i\pi_i)\rangle = \sqrt{2}|\pi_i\pi_i\rangle \quad (\text{C.139})$$

になる. 係数の  $\sqrt{2}$  は, この状態が終状態の場合, 反応の確率が 2 倍になることを意味する<sup>7</sup>.  $\pi$  メソンの固有パリティは,  $P_\pi = -1$  なので, 式 (C.138) のパリティを反転してみると,

$$P|\Psi_+\rangle = \frac{|(-\pi_1)(-\pi_2)\rangle + |(-\pi_2)(-\pi_1)\rangle}{\sqrt{2}} = +|\Psi_+\rangle \quad (\text{C.140})$$

と  $2\pi$  系のパリティは正 ( $P = +1$ ) である.  $|\Psi_+(\pi^+\pi^-)\rangle$ ,  $|\Psi_+(\pi^0\pi^0)\rangle$  の場合, C 変換すると,

$$\begin{aligned} C|\Psi_+(\pi^+\pi^-)\rangle &= |\Psi_+(\pi^-\pi^+)\rangle = +|\Psi_+(\pi^+\pi^-)\rangle \\ C|\Psi_+(\pi^0\pi^0)\rangle &= +|\Psi_+(\pi^0\pi^0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

なので  $2\pi$  系の荷電パリティは正 ( $C = +1$ ) になる.

$\rho$  メソンのスピンは  $J = 1$  なので,  $\rho \rightarrow \pi\pi$  の崩壊中の  $\pi\pi$  間の軌道角運動量は  $\ell = 1$  になる. この場合,  $\pi\pi$  系の質量固有状態の波動関数は,

$$|\Psi_{\ell=1}(\pi_1, \pi_2)\rangle = \frac{|\pi_1\pi_2\rangle - |\pi_2\pi_1\rangle}{\sqrt{2}} Y_1^m(\theta, \phi) \quad (\text{C.142})$$

と表せる. ここで,  $Y_\ell^m$  は式 (C.48) で使われた球面調和関数である. 2つの  $\pi$  を交換すると,

$$\begin{aligned} \text{EX}|\Psi_{\ell=1}(\pi_1, \pi_2)\rangle &= \frac{|\pi_2\pi_1\rangle - |\pi_1\pi_2\rangle}{\sqrt{2}} Y_1^m(\pi - \theta, \phi + \pi) \\ &= (-1) \frac{|\pi_1\pi_2\rangle - |\pi_2\pi_1\rangle}{\sqrt{2}} \times (-1) Y_1^m(\theta, \phi) = +|\Psi_{\ell=1}(\pi_1, \pi_2)\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.143})$$

と対称であることを示すことができる. とくに,  $\pi_1$  と  $\pi_2$  が同一粒子 ( $= \pi_i$ ) の場合,

$$|\Psi_{\ell=1}(\pi_i\pi_i)\rangle = 0 \quad (\text{C.144})$$

と, この状態は存在しない. これが  $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$  の崩壊が存在しない理由である. この系のパリティは,

$$P|\Psi_{\ell=1}(\pi_1\pi_2)\rangle = \frac{|(-\pi_1)(-\pi_2)\rangle - |(-\pi_2)(-\pi_1)\rangle}{\sqrt{2}} Y_1^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = -|\Psi_{\ell=1}(\pi_1\pi_2)\rangle \quad (\text{C.145})$$

なので, 負 ( $P = -1$ ) である.  $\Psi_-(\pi^+\pi^-)$  を C 変換すると,

$$C|\Psi_-(\pi^+\pi^-)\rangle = \frac{|\pi^-\pi^+\rangle - |\pi^+\pi^-\rangle}{\sqrt{2}} Y_1^m(\theta, \pi) = -|\Psi_-(\pi^+\pi^-)\rangle \quad (\text{C.146})$$

7 2つの光子の場合も同様な波動関数により, レーザーの誘導放出の原理になる.

なので、荷電パリティは負である。 $\pi\pi$  系の状態を表 C.2 にまとめる。可能なアイソスピン ( $I$ ) は、付録 D のクレブシュ・ゴルダン係数の関係を逆に解くことで求めることができる。

表 C.2  $\pi\pi$  系の可能な状態と量子数  $KK$ ,  $BB$  系の場合も同様。

$\ell$	粒子対	構造	$J$	$P$	$C$	$CP$	$I$
0	$\pi^+\pi^-$	$( \pi^+\pi^- \rangle +  \pi^-\pi^+ \rangle)/\sqrt{2}$	0	+1	+1	+1	0, 2
	$\pi^\pm\pi^0$	$( \pi^\pm\pi^0 \rangle +  \pi^0\pi^\pm \rangle)/\sqrt{2}$	0	+1	$\times$	$\times$	2
	$\pi^0\pi^0$	$\sqrt{2} \pi^0\pi^0 \rangle$	0	+1	+1	+1	0, 2
	$\pi^\pm\pi^\pm$	$\sqrt{2} \pi^\pm\pi^\pm \rangle$	0	+1	$\times$	$\times$	2
1	$\pi^+\pi^-$	$( \pi^+\pi^- \rangle -  \pi^-\pi^+ \rangle)/\sqrt{2}$	1	-1	-1	+1	1
	$\pi^\pm\pi^0$	$( \pi^\pm\pi^0 \rangle -  \pi^0\pi^\pm \rangle)/\sqrt{2}$	1	-1	$\times$	$\times$	1
	$\pi^0\pi^0, \pi^\pm\pi^\pm$	禁止	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

## C.6 ヘリシティとカイラリティ

### C.6.1 ヘリシティ

C.4.6 項では、スピンの方向は、 $z$  軸方向の成分で定義してきた。しかし、方向の基準を外の座標に求めるのではなく、その粒子の運動量方向に対する成分でスピンの方向を定義すると便利な場合も多い。古典的には、スピンベクトル ( $\vec{s}$ ) の運動量 ( $\vec{p}$ ) 方向の成分は  $\vec{s}\vec{p}/(|\vec{s}||\vec{p}|)$  なので、

$$\Sigma_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \vec{s}\vec{p}/(|\vec{s}||\vec{p}|)}{2} \quad (\text{C.147})$$

という量は、スピンが運動量方向 (反対方向) を向いているとき  $\Sigma_+ = 1(0)$ ,  $\Sigma_- = 0(1)$  になる。式 (C.147) を量子化 ( $\vec{s}/|\vec{s}| \rightarrow \vec{\sigma}$ ) して、

$$\psi_{\pm} = \frac{1 \pm \hat{p}\vec{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} u \\ \vec{\eta}\vec{\sigma}u \end{pmatrix} e^{-ipx} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ \vec{\eta}\vec{\sigma}u_{\pm} \end{pmatrix} e^{-ipx}; \quad u_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \hat{p}\vec{\sigma}}{2} u \quad (\text{C.148})$$

とすると、 $\psi_{\pm}$  はそれぞれ  $\psi$  の、スピンが運動量方向を向いている成分と反対方向を向いている成分である。ここで、 $\hat{p}$  は運動量方向の単位ベクトルである。本書では、このスピンの運動量方向成分をヘリシティとよび、 $\psi_+$  をヘリシティが正 (+1) の状態、 $\psi_-$  をヘリシティが負 (-1) の状態とよぶ。それぞれの状態である確率は、

$$|\psi_{\pm}|^2 = (1 + \eta^2)|u_{\pm}|^2 = \frac{1 + \eta^2}{2} (|u|^2 \pm \hat{p}[u^\dagger \vec{\sigma} u]) = \frac{1}{2} (1 \pm \hat{p}\hat{s}) \quad (\text{C.149})$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 [u^\dagger \vec{\sigma} u] &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_z & \vec{e}_- \\ \vec{e}_+ & -\vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 &= \dots = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z = \hat{s}
 \end{aligned} \tag{C.150}$$

を使った。

### C.6.2 カイラリティ

弱い相互作用の  $W^\pm$  ボソンは、次の状態のフェルミオンとのみ結合する。

$$\psi_L \equiv \gamma_L \psi \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \psi = \frac{(1 - \vec{\eta}\vec{\sigma})}{2} \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} e^{-ipx} \tag{C.151}$$

もし、このフェルミオンが相対論的な速度で運動しているとする、 $\vec{\eta} = \vec{p}/(E + m) \rightarrow \hat{p}$  になるので、

$$\psi_L \rightarrow \frac{1 - \hat{p}\vec{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} e^{-ipx} \tag{C.152}$$

となる。一方このとき、ヘリシティが負の状態は、

$$\psi_- \rightarrow \frac{1 - \hat{p}\vec{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} u \\ \hat{p}\vec{\sigma}u \end{pmatrix} e^{-ipx} = \frac{1 - \hat{p}\vec{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} e^{-ipx} \tag{C.153}$$

になるので、 $\psi_L$  と  $\psi_-$  は一致する。同様に、 $\psi_R \equiv (1 + \gamma_5)\psi/2$  を定義することもでき、相対論的極限で  $\psi_R = \psi_+$  になる。本書では、この  $\psi_L$ 、 $\psi_R$  の状態を、カイラリティが左巻き、右巻きとよぶ。右巻きカイラリティの基本状態を  $|R\rangle$  と書くと、 $\gamma_L |R\rangle = 0$  より一般に

$$|R\rangle \propto \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \tag{C.154}$$

になる。同様に左巻きカイラリティの基本状態は、

$$|L\rangle \propto \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \tag{C.155}$$

になる。相対論的極限では、 $\psi_+$  中の  $\psi_L$  成分は 0 だが、速度  $\beta < 1$  のとき、 $\psi_+$  中の  $\psi_L$  成分は、

$$\psi_{+L} = \gamma_L \psi_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ \vec{\eta}\vec{\sigma}u_+ \end{pmatrix} e^{-ipx} = \frac{(1 - \eta)(1 + \hat{p}\vec{\sigma})}{4} \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \tag{C.156}$$

になる。したがって  $\psi_+$  中の  $\psi_L$  状態である確率は、

$$P_{+L} = \frac{|\psi_{+L}|^2}{|\psi_+|^2} = \frac{(1 - \beta)(1 + \hat{p}\hat{s})/4}{(1 + \hat{p}\hat{s})/2} = \frac{1 - \beta}{2}, \quad \text{同様に、} \quad P_{-R} = \frac{1 - \beta}{2} \tag{C.157}$$



となる.

### C.6.3 カイラリティの保存と非保存

議論を簡素化するために、電磁相互作用の入ったディラック方程式 (C.81) の時間発展だけを取り出してみると、

$$\dot{\psi} = -ieA_0\psi - im\gamma_0\psi \quad (\text{C.158})$$

になる. これに左から、式 (C.151) で定義された  $\gamma_{L/R}$  を作用させてみると、 $\gamma_L\gamma_0 = \gamma_0\gamma_R$  などより、

$$\begin{cases} \dot{\psi}_L = -ieA_0\psi_L - im\gamma_0\psi_R \\ \dot{\psi}_R = -ieA_0\psi_R - im\gamma_0\psi_L \end{cases} \quad (\text{C.159})$$

になる.

式 (C.159) の 2 つの式の右辺の第 1 項は、フェルミオンのカイラリティは、電磁相互作用による反応の前後で変化しないことを意味する<sup>8</sup>. たとえば、始状態のフェルミオンのカイラリティが左巻きだった場合、ゲージボソンと反応した後のフェルミオンのカイラリティも、散乱角によらず左巻きである. この特徴を**カイラリティ保存**とよぶ. この特徴はまた、フェルミオンと反フェルミオンが対消滅、あるいは対生成する場合は、フェルミオンと反フェルミオンのカイラリティは逆でなければならないことを意味する. カイラリティ保存の特徴が顕著に表れているのが、第 3 章で説明される  $\pi^\pm \rightarrow e^\pm + \nu$  崩壊の強い抑制である.

式 (C.159) 右辺の第 2 項は、フェルミオンに質量がある場合カイラリティ成分が時間の経過とともに変化することを表す.  $A_0 = 0$  のとき方程式 (C.158) の一般解は、

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} ue^{-imt} \\ ve^{imt} \end{pmatrix} \quad (\text{C.160})$$

である. ただし、 $u, v$  は任意の 2 成分スピノールである.  $t = 0$  で  $\psi(0) = |R\rangle = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$  とすると、 $v = u$  になるので、時刻  $t$  では、

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} ue^{-imt} \\ ue^{imt} \end{pmatrix} = \cos mt \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} - i \sin mt \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} = \cos mt |R\rangle - i \sin mt |L\rangle \quad (\text{C.161})$$

になることを示すことができる. つまり、純粋な  $|R\rangle$  として生まれた状態でも、 $1/m$  秒程度後には  $|L\rangle$  成分が生まれることになる. これは、質量をもつフェルミオンのカイラリティは保存しないことを意味する.  $e^+e^- \rightarrow \mu_L^+\mu_R^-$  など電磁相互作用により生まれた  $\mu_R^-$  が  $\mu_L^-$  としか反応しない弱い相互作用で崩壊できるのは、このためである.

8 電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用など、ベクトル結合 ( $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ) と軸性ベクトル結合 ( $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ ) の任意の組み合わせに対して成り立つ.

## C.7 散乱断面積の計算

### C.7.1 ラザフォード散乱断面積

ラザフォード (Rutherford) は、金などの重い原子核に数 MeV の  $\alpha$  粒子を入射し、その散乱の角度分布から、原子の構造を研究した。このような散乱をラザフォード散乱とよぶ。本項では、ラザフォード散乱断面積をシュレディンガー方程式から計算する<sup>9</sup>。

電荷  $Ze$  の重い原子核による電荷  $ze$  の軽い荷電粒子の散乱を想定する。重い原子核がつくるポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$U(\vec{x}) = -Zz\alpha \frac{e^{-\varepsilon|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \quad (\text{C.162})$$

ここで、 $e^{-\varepsilon|\vec{x}|}$  は、原子核の周辺軌道電子による電荷の遮蔽の効果を表し、 $\varepsilon \sim 1/(1\text{\AA}) \sim 10\text{eV}$  程度の大きさである。いま想定しているラザフォード散乱の場合、入射粒子のエネルギー ( $E_i$ ) は数 MeV なので、 $\varepsilon \ll E_i$  である。この場合、散乱断面積の計算結果は  $\varepsilon$  の大きさによらないことが後に示される。

入射粒子の波動関数は式 (C.45) のシュレディンガー方程式を満たしながら発展するため、一般に、微小時間  $\delta t$  だけ異なった時間の波動関数の関係は、

$$\psi(t + \delta t) = \psi(t) + \dot{\psi}(t)\delta t = \psi(t) - i(H_0 + U)\psi(t)\delta t \quad (\text{C.163})$$

で表すことができる。 $\phi(x)$  を平面波の波動関数として、最初、 $\phi_i(x) = e^{-ip_i x}$  がポテンシャルに入射したとすると、時刻  $t$  での波動関数は、

$$\psi(t + \delta t, \vec{x}) = \phi_i(x) - i(H_0 + U)\phi_i(x)\delta t \quad (\text{C.164})$$

になる。ここで、

$$H_0\phi_i = E_i\phi_i \quad (\text{C.165})$$

の関係があるため、

$$\psi(t + \delta t, \vec{x}) = e^{-ip_i x}(1 - iE_i\delta t) - iU(\vec{x})\phi_i(x)\delta t \rightarrow \phi_i(t + \delta t, \vec{x}) - iU(\vec{x})e^{-ip_i x}\delta t \quad (\text{C.166})$$

となる。右辺の第 1 項は、散乱されずにそのまま通り過ぎる振幅で、第 2 項の

$$\xi = -iU\phi_i = -iUe^{-ip_i x} \quad (\text{C.167})$$

が単位時間に生じる散乱波の波動関数である。この入射粒子の波動関数  $\phi_i$  は、本来は散乱が進行するとともに変化するが、その変化は小さいためここでの議論では無視して、 $\phi_i(\vec{x}) = e^{-ip_i x}$  であり続けると近似する。

9 [b12]-II には、少し高度な数学的取り扱いが必要であるが、非常によい解説がある。

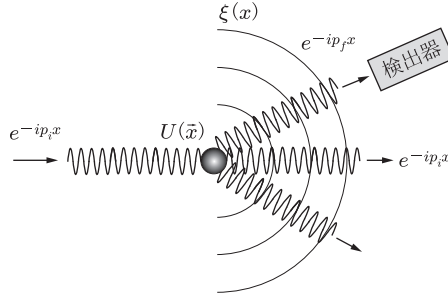


図 C.3 散乱波をさまざまな運動量の平面波の重ね合わせと考える

式 (C.167) で表される散乱波は，図 C.3 のように，さまざまな方向の運動量の平面波の重ね合わせであると考えられる。

$$\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\vec{p}) \phi(\vec{p}) d^3 p \quad (\text{C.168})$$

単位時間に生じる， $\theta_f$  の方向に進む平面波  $\phi_f = e^{-ip_f x}$  の振幅  $a(\vec{p}_f)$  は， $\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f$  として，

$$a(\vec{p}_f) = \int \phi_f^*(x) \xi(x) d^3 x = -i \int U(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3 x e^{i(E_f - E_i)t} \quad (\text{C.169})$$

になる。散乱が始まった後，粒子がポテンシャルを通り過ぎる時間より充分長い時間  $T$  での振幅は， $\Delta E = E_f - E_i$  として，

$$a(\vec{p}_f, T) = \int_0^T a(\vec{p}_f) dt = -i e^{i(\Delta E T/2)} \frac{\sin(\Delta E T/2)}{(\Delta E/2)} \int U(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3 x \quad (\text{C.170})$$

ここで，

$$\mathcal{M}_{if}(\vec{q}) \equiv 2\pi \int U(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3 x \quad (\text{C.171})$$

と定義すると，

$$a(\vec{p}_f, T) = -i \frac{e^{i(\Delta E T/2)}}{2\pi} \frac{\sin(\Delta E T/2)}{(\Delta E/2)} \mathcal{M}_{if}(\vec{q}) \quad (\text{C.172})$$

時刻が  $T$  のときに  $\vec{p}_f$  の方向を向いている平面波の振幅が  $a(\vec{p}_f, T)$  だから，散乱される粒子の数は，

$$N_{\text{scat}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |a(\vec{p}_f, T)|^2 d^3 p_f = \frac{1}{(2\pi)^5} \int |\mathcal{M}_{if}(\vec{q})|^2 \frac{\sin^2(\Delta E T/2)}{(\Delta E/2)^2} p_f^2 dp_f d\Omega_f \quad (\text{C.173})$$

になる。いまは非相対論的な場合を考えているため，粒子の速度を  $v$  として， $E = mv^2/2 = p^2/2m$  である。そのため， $p_f^2 = 2mE_f$ ， $p_f dp_f = m dE_f$  の関係があり，

$$N_{\text{scat}} = \frac{T\sqrt{m^3}}{8\sqrt{2}\pi^5} \int |\mathcal{M}_{if}(\vec{q})|^2 \frac{\sin^2((E_f - E_i)T/2)}{[(E_f - E_i)T/2]^2} \sqrt{E_f} d(E_f T/2) d\Omega_f \quad (\text{C.174})$$

になる。ここで、 $\sin^2(\Delta ET/2)/(\Delta ET/2)^2$  は、 $E_f = E_i$  に鋭いピークをもち、この項の以外の部分の関数の  $E_f$  依存性は弱いので、 $E_f = E_i$  と置き換えて、

$$\begin{aligned} N_{\text{scat}} &= \frac{T\sqrt{m^3 E_i}}{8\sqrt{2}\pi^5} \int |\mathcal{M}_{if}(p_i(\vec{e}_i - \vec{e}_f))|^2 d\Omega_f \int_{-E_i T/2}^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta ET/2)}{(\Delta ET/2)^2} d(\Delta ET/2) \\ &\sim \frac{m^2 T v_i}{(2\pi)^4} \int |\mathcal{M}_{if}(p_i \Delta \vec{e}_{if})|^2 d\Omega_f \end{aligned} \quad (\text{C.175})$$

になる。ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin^2 x/x^2) dx = \pi$  の関係を使った。

一方、入射粒子に関しては、散乱断面積を  $\sigma$  とすると、時間  $t = 0 \sim T$  の間に散乱される粒子数は、

$$N_{\text{scat}} = T |\phi_i|^2 v_i \sigma = T v_i \sigma \quad (\text{C.176})$$

になる。これが式 (C.175) と一致するのだから、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{m^2}{(2\pi)^4} |\mathcal{M}_{if}(p_i \Delta \vec{e}_{if})|^2 \quad (\text{C.177})$$

が得られる。

ポテンシャル (C.162) を用いて  $\mathcal{M}_{if}(\vec{q})$  を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{if}(\vec{q}) &= -2\pi Z z \alpha \int \frac{e^{-\epsilon|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x = -4\pi^2 Z z \alpha \int r e^{-\epsilon r} e^{i|\vec{q}|r \cos \theta} dr d\cos \theta \\ &= -\frac{8\pi^2 Z z \alpha}{|\vec{q}|} \int e^{-\epsilon r} \sin |\vec{q}| r dr = -\frac{8\pi^2 Z z \alpha}{|\vec{q}|^2 + \epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon^2 \ll |\vec{q}|^2} -\frac{8\pi^2 Z z \alpha}{|\vec{q}|^2} \end{aligned} \quad (\text{C.178})$$

になる。移行運動量は、

$$|\vec{q}|^2 = p_i^2 |\vec{e}_i - \vec{e}_f|^2 = 4p_i^2 \sin^2 \frac{\theta_f}{2} = 8mE_i \sin^2 \frac{\theta_f}{2} \quad (\text{C.179})$$

なので、結局散乱断面積は次のようになる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{m^2}{(2\pi)^4} \left| \frac{8\pi^2 Z z \alpha}{8mE_i \sin^2(\theta_f/2)} \right|^2 = \frac{Z^2 z^2 \alpha^2}{16E_i^2 \sin^4(\theta_f/2)} \quad (\text{C.180})$$

ラザフォードの実験の場合は、入射粒子は  $\alpha$  線なので、 $z = 2$  と置いて、

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E_i^2 \sin^4(\theta_f/2)} \quad (\text{C.181})$$

これをラザフォード散乱断面積とよぶ。

### C.7.2 ディラック散乱

静止しているフェルミオンによる、相対論的なフェルミオンの散乱をディラック散乱とよぶ。ディラック散乱断面積の計算は、ディラック方程式から始めて、相対論的效果を考慮しつつ、前項でラザフォード散乱を導いたようなプロセスで計算できるが、本項では、ラザフォード散乱からの置き換えで求めることにする。正確な導出を知りたい場合は、たとえば、文献 [b2] を参照のこと。

相対論的なフェルミオンの散乱断面積の場合、まず非相対論的な波動関数  $\phi$  を、ディラック方程式の解  $\psi$  に置き換える。次に、静電ポテンシャルを一般的な電磁ポテンシャルに置き換える。ディラック方程式 (C.81) を書き換えて波動関数の時間微分の関数として見ると、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (H_0 + U)\psi = (\gamma_0 m + e\gamma_0\gamma_\mu A^\mu)\psi \quad (\text{C.182})$$

となるので、いまの場合の電磁ポテンシャルは、 $U \rightarrow ze\gamma_0\gamma_\mu A^\mu$  と置き換えることができると考えられる。その結果、式 (C.171) の積分の中身は次のように表される。

$$[\phi_f^* U \phi_i] \rightarrow ze[\psi_f^\dagger \gamma^0 \gamma_\mu A^\mu \psi_i] = ze[\bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i] \equiv \mathcal{M}_{fi} \quad (\text{C.183})$$

ここで、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  である。波動関数をスピン部分と平面波の部分に分離すると、

$$\psi = we^{-ipx} \quad (\text{C.184})$$

と書け、これを使うと、

$$\mathcal{M}_{fi} = ze[\bar{w}_f \gamma_\mu w_i] A^\mu e^{-i(p_i - p_f)x} \quad (\text{C.185})$$

と表すことができる。電磁ポテンシャル  $A^\mu$  は、標的粒子  $\Psi$  の電荷  $Ze$  がつくる。式 (C.83) から、 $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$  に変化するとき生じる  $A^\mu$  は、次のクライン・ゴールドン方程式を満たす。

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j^\mu = Ze[\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i] = Ze[\bar{W}_f \gamma^\mu W_i] e^{-i(P_i - P_f)x} \quad (\text{C.186})$$

ここで、 $A^\mu$  として平面波を仮定し、

$$A^\mu = a^\mu e^{-ikx} \quad (\text{C.187})$$

を式 (C.186) に入れると、

$$-k^2 a^\mu e^{-ikx} = Ze[\bar{W}_f \gamma^\mu W_i] e^{-i(P_i - P_f)x} \quad (\text{C.188})$$

より、 $k = P_i - P_f$ 、 $a^\mu = -Ze[\bar{W}_f \gamma^\mu W_i]/k^2$  なので、

$$A^\mu = -\frac{Ze[\bar{W}_f \gamma^\mu W_i]}{(P_i - P_f)^2} e^{-i(P_i - P_f)x} \quad (\text{C.189})$$

である。これを式 (C.183) に入れると、

$$\mathcal{M}_{fi} = zZ e^2 \frac{[\overline{w}_f \gamma_\mu w_i][\overline{W}_f \gamma^\mu W_i]}{(P_f - P_i)^2} e^{i(P_f - P_i - p_i + p_f)x} \quad (\text{C.190})$$

になる. 右端の指数関数の部分は後に  $x$  で積分することにより,  $\delta$  関数になり, エネルギー・運動量の保存則,  $P_i + p_i = P_f + p_f$  を導く. これに対する散乱断面積は,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4Z^2 z^2 \alpha^2 \frac{m^2 E_f^2}{E_i^2} \frac{|[\overline{w}_f \gamma_\mu w_i][\overline{W}_f \gamma^\mu W_i]|^2}{(q^2)^2} \quad (\text{C.191})$$

になる<sup>10</sup>.

### C.7.3 $W^\pm$ ボソンを介した散乱

弱い相互作用では, 光子の代わりに  $W^\pm$  粒子を交換することにより, 反応が生じる. 弱い相互作用による散乱振幅は, 式 (C.185) に対応させ,

$$\mathcal{M}_W = g_W [\overline{w}_{fL} \gamma_\mu w_{iL}] W^\mu e^{-i(p_i - p_f)x} \quad (\text{C.192})$$

と書くことができる. ここで,  $g_W$  は,  $W^\pm$  とフェルミオンの結合定数,  $w_L$  は左巻きカイラリティ状態の 4 成分スピノールを表す.  $W^\pm$  粒子は  $M_W$  の質量をもつため, 式 (C.186) に対応して, 次のクライン・ゴールドン方程式を満足する

$$(\partial_\nu \partial^\nu + M_W^2) W^\mu = g_W [\overline{W}_{fL} \gamma^\mu W_{iL}] e^{-i(P_i - P_f)x} \quad (\text{C.193})$$

式 (C.186) 以降の議論と同じように,  $W^\mu = a^\mu e^{-ikx}$  とおくと,

$$(M_W^2 - q^2) a^\mu e^{-iqx} = g_W [\overline{W}_{fL} \gamma^\mu W_{iL}] e^{-i(P_i - P_f)x} \quad (\text{C.194})$$

となる. したがって,  $q = P_i - P_f$ ,  $a^\mu = g_W \frac{[\overline{W}_{fL} \gamma^\mu W_{iL}]}{M_W^2 - q^2} e^{-iqx}$  であり,

$$W^\mu = g_W \frac{[\overline{W}_{fL} \gamma^\mu W_{iL}]}{M_W^2 - q^2} e^{-iqx} \quad (\text{C.195})$$

になる. これを式 (C.192) に入れると,

$$\mathcal{M}_W = g_W^2 \frac{[\overline{w}_{fL} \gamma_\mu w_{iL}][\overline{W}_{fL} \gamma^\mu W_{iL}]}{M_W^2 - q^2} e^{-i(q - p_i + p_f)x} \quad (\text{C.196})$$

になる.

## C.8 ラグランジアン

古典力学に対する解析力学では, ラグランジアンという量 ( $L$ ) を, 運動エネルギー ( $T$ ) と, ポテンシャルエネルギー ( $U$ ) の差で定義する. 1 次元でポテンシャルが  $x$  の関数の場合, 一

<sup>10</sup> 参考文献 [b2] の式 (7.44).

般に,

$$L \equiv T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \quad (\text{C.197})$$

になる. そして, このラグランジアンを用いて, 次のようなオイラー・ラグランジュ方程式をつくると, それが運動方程式になる.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (\text{C.198})$$

試しに式 (C.197) のラグランジアンを式 (C.198) のオイラー・ラグランジュ方程式に入れてみると,

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (\text{C.199})$$

と, 運動方程式が得られる. つまり, 運動を記述する場合, 運動方程式を使っても, ラグランジアン + オイラー・ラグランジュ方程式を使ってもよいということになる.

相対論的量子力学の場合, ラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  を使用する. ラグランジアン密度は, 座標の代わりに波動関数をパラメータとして扱う. たとえば, ディラック方程式に対応するラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (\text{C.200})$$

であり, 次のオイラー・ラグランジュ方程式により, ディラック方程式が導かれる.

$$0 = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (\text{C.201})$$

クライン・ゴールドン方程式に対するラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (\text{C.202})$$

で与えられる.  $\phi^*$  に対するオイラー・ラグランジュ方程式より, 次のクライン・ゴールドン方程式を得る.

$$0 = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi \quad (\text{C.203})$$

## C.9 QCD とグルーオン

カラーをもったクォークの一般的な状態の波動関数は,

$$\psi_q(t) = C_R(t) |q_R\rangle + C_G(t) |q_G\rangle + C_B(t) |q_B\rangle \quad (\text{C.204})$$

で表される. 標準理論における QCD 部分のラグランジアンは, 式 (11.20) より,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a \quad (\text{C.205})$$

となる。ここで、

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_S(G_a^\mu T^a), \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_S f_{abc}^a G_\mu^b G_\nu^c \quad (\text{C.206})$$

である。 $T_a$  は次の 8 つの  $3 \times 3$  の行列で表すことができる。

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.207})$$

$G_\mu^a$  はグルーオンを表し、式 (C.205), (C.207) より、カラーの遷移は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_R \\ C_G \\ C_B \end{pmatrix} = -i \frac{g_S}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \begin{pmatrix} G_\mu^3 + G_\mu^8/\sqrt{3} & G_\mu^1 - iG_\mu^2 & G_\mu^4 - iG_\mu^5 \\ G_\mu^1 + iG_\mu^2 & -G_\mu^3 + G_\mu^8/\sqrt{3} & G_\mu^6 - iG_\mu^7 \\ G_\mu^4 + iG_\mu^5 & G_\mu^6 + iG_\mu^7 & -2G_\mu^8/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_R \\ C_G \\ C_B \end{pmatrix} \quad (\text{C.208})$$

と表される。たとえば、この (1,2) 成分は、図 C.4(a) に示すように、 $|q_G\rangle$  が  $(G_\mu^1 - iG_\mu^2)/\sqrt{2}$  というゲージボソンを放出して  $|q_R\rangle$  になることを意味する。カラーを変えるグルーオンを次のように定義する。

$$g_{G\bar{R}} = \frac{G_\mu^1 - iG_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.209})$$

カラーを変えない遷移は、ゲージ粒子により図 C.5 のように表される。たとえば、 $G^3$  は  $q_R$  と  $q_G$  の両方に結合する。これは、 $q_R \rightarrow q_R + G^3$  で発生したグルーオン  $G^3$  は、 $q_R + G^3 \rightarrow q_R$  だけでなく、 $q_G + G^3 \rightarrow q_G$  のように、異なったカラーのクォークに吸収され得ることを意味する。これは、 $g_{R\bar{R}}$  のように、単独のグルーオンでは表現できず、 $G^3$  は  $g_{R\bar{R}}$  と  $g_{G\bar{G}}$  の重ね合わせ状態であると考える。本書では、この  $G^3$  を特に  $g_-$  と書き、次で定義する。

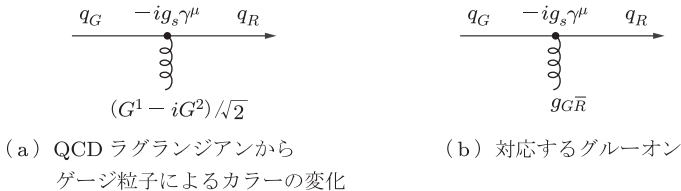


図 C.4 クォークカラーの変化



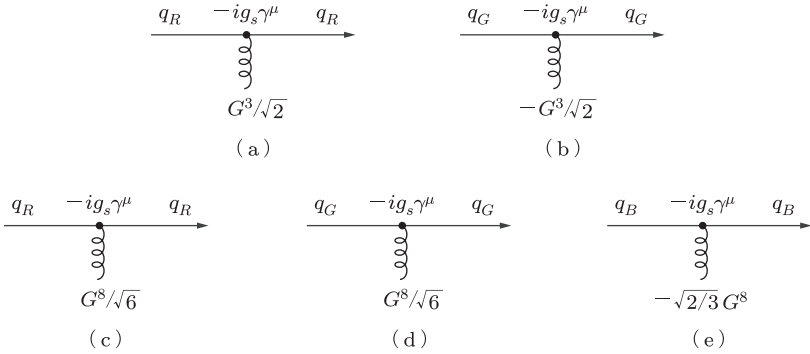


図 C.5 ゲージ粒子によるクォークカラーの変化しない遷移

$$g_- = \frac{g_{R\bar{R}} - g_{G\bar{G}}}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.210})$$

同様に  $G^8$  から、もう 1 つの中性のグルーオンとして、

$$g_+ = \frac{g_{R\bar{R}} + g_{G\bar{G}} - 2g_{B\bar{B}}}{\sqrt{6}} \quad (\text{C.211})$$

が存在する。結局、グルーオンとして、

$$g_{R\bar{B}}, \quad g_{R\bar{G}}, \quad g_{B\bar{R}}, \quad g_{B\bar{G}}, \quad g_{G\bar{R}}, \quad g_{G\bar{B}} \\ g_- = \frac{g_{R\bar{R}} - g_{G\bar{G}}}{\sqrt{2}}, \quad g_+ = \frac{g_{R\bar{R}} + g_{G\bar{G}} - 2g_{B\bar{B}}}{\sqrt{6}} \quad (\text{C.212})$$

のような 8 種類が存在すると考えることができる。反クォークとグルーオンの結合係数の符号は、逆 ( $g_S \rightarrow -g_S$ ) になる。

このようなグルーオンの状態は、ハドロンの特性を理解するために重要である。

## C.10 パリティ対称性と保存量

P 変換とは座標の  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  への変換である。中心からの距離  $|\vec{x}|$  にのみ依存する電磁相互作用ポテンシャル  $U$  中の粒子のシュレディンガー方程式を考えてみる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}) = \left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U(|\vec{x}|) \right] \psi(\vec{x}) \quad (\text{C.213})$$

シュレディンガー方程式をパリティ変換すると、 $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  と変換して、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(-\vec{x}) = \left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U(|\vec{x}|) \right] \psi(-\vec{x}) \quad (\text{C.214})$$

となる。これは、 $\psi(-\vec{x})$  もまた、同じシュレディンガー方程式を満たすことを意味する。つまり、 $\psi(x)$  も  $\psi(-x)$  もシュレディンガー方程式の解であり、さらに  $\psi(x)$  と  $\psi(-x)$  の任意

の混合も元のシュレディンガー方程式を満たす。とくに、 $\psi(x)$  と  $\psi(-x)$  の間に遷移がある場合、

$$\Psi_{\pm}(\vec{x}) = \frac{\psi(\vec{x}) \pm \psi(-\vec{x})}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.215})$$

は異なる質量をもつ質量固有状態になる<sup>10</sup>。  $\Psi_{\pm}(\vec{x})$  をパリティ変換した状態は、

$$P\Psi_{\pm}(\vec{x}) = \Psi_{\pm}(-\vec{x}) = \frac{\psi(-\vec{x}) \pm \psi(\vec{x})}{\sqrt{2}} = \pm\Psi_{\pm}(\vec{x}) \quad (\text{C.216})$$

と、パリティの固有状態でもある。パリティ変換した波動関数にかかる符号が負の場合を「パリティがマイナス」、正の場合を「パリティがプラス」であるという。

波動関数が時刻  $t$  で、決まったパリティをもつ場合 ( $\phi(t, \vec{x}) = \Psi_{\pm}(t, \vec{x})$ )、時刻  $t + \delta t$  での状態は、

$$\phi(t + \delta t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}) + \dot{\phi}(t, \vec{x})\delta t = [1 - iH(\vec{x})\delta t]\Psi_{\pm}(t, \vec{x}) \quad (\text{C.217})$$

になる。ハミルトニアンがパリティ対称である場合 ( $H(-\vec{x}) = H(\vec{x})$ )、式 (C.217) をパリティ変換してみると、

$$\phi(t + \delta t, -\vec{x}) = [1 - iH(-\vec{x})\delta t]\Psi_{\pm}(t, -\vec{x}) = \pm\phi(t + \delta t, \vec{x}) \quad (\text{C.218})$$

になる。つまり、最初のパリティと  $\delta t$  秒後のパリティは同じである。このように、ある反応の前後で状態のパリティの変化がない場合、パリティが保存するという。パリティ保存則は、原子核の遷移の選択則など、我々の世界に大きくかかわる物理的効果を生んでいる。

---

10 遷移がない場合、 $\psi(\pm\vec{x})$  がそれぞれ同じ質量をもつ質量固有状態になり（エネルギーが縮退する）、一般には決まったパリティをもたない。