

やさしく学べる材料力学 (第3版) Web 版補遺

モールのひずみ円 と 平面応力のフックの法則

(2016.1.8)

平面応力のフックの法則は、式(a.30)で与えられる。また、ひずみ変換式は式(a.5), (a.6), (a.7)で与えられる。これらの関係式の導出は難しくはないのであるが、分かりやすく説明するためには、少なくないページ数が必要となる。筆者は、これらの事項は「弾性力学」の授業で学ぶべき内容であると思っている。

材料力学で学ぶモールの応力円では、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が与えられて、主応力 σ_1, σ_2 や最大せん断応力 τ_{\max} を求めさせている。実際には $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の値を簡単に求めることはできない。これらの値を得るためには、ひずみゲージを材料の表面に3枚貼って、まず、3方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ を求めてから、3元連立1次方程式を解いて $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ を求める。その後、フックの法則の式である式(a.30)を用いて $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求める必要がある。

あるいは、 $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ を用いてモールのひずみ円を描いて、主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値を図から読みとって求め、式(a.31)を用いて主応力 σ_1, σ_2 を求める。最大せん断応力は、材料力学で学ぶモールの応力円から分かるように、 $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ で計算出来る。

フックの法則とモールのひずみ円は弾性力学に含めた方が良いのであるが、上述のように材料力学にも関係してくる。また、これらの事項を大学院材料力学入試問題で出題する大学院もある。このような事情を考えて、本書では、平面応力のフックの法則とモールのひずみ円の解説を Web 版補遺に掲載する事とした。

この補遺の執筆に際して、技術士(機械部門)の中嶋 浩氏には原稿をお読み戴き、貴重なご助言を戴きました。

著者

2016年1月8日

A. モールのひずみ円と平面応力状態のフックの法則

材料の表面にひずみゲージを貼れば、垂直ひずみが求められる。3枚のひずみゲージを貼れば、3方法の垂直ひずみが求められるが、この場合、ゲージを貼った位置の主応力、最大せん断応力が決定される。ゲージを貼れば、主応力 σ_1, σ_2 や最大せん断応力 τ_{\max} が求められるが、これについて理解するためには、弾性力学の知識が必要になる。

材料力学の範囲内で説明するために、途中の詳しい数式展開については弾性力学の教科書に譲って、ひずみ変換式とフックの法則の数式の提示のみに着目して解説する。材料力学ではモールの応力円について学ぶが、この円を描く時には応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が与えられた。実は、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は簡単に求められる数値ではない。3枚のゲージを材料の表面に貼って3方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ を求めてから、 (x, y) 座標についての垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とせん断ひずみ γ_{xy} を求める。その後、フックの法則を適用して $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を計算する。すなわち、かなり手間がかかる実験と計算から $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は与えられる。

主応力 σ_1, σ_2 や最大せん断応力 τ_{\max} は、3方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ からモールのひずみ円を描いて、まず主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を求める。主ひずみと主応力についてのフックの法則である式(a.31)を適用して σ_1, σ_2 を求めても良い。

ここでは、最初に、 (x, y) 座標についての垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とせん断ひずみ γ_{xy} を簡単に述べる。その後、 (r, θ) 座標についての垂直ひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ とせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$ について説明する。これらのひずみ間に成立するひずみ変換式を数式展開なしに結果のみを提示する。その後、モールのひずみ円を描いて、主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の求める手法について説明する。

最後に物体の表面や薄い板に対して適用出来る平面応力状態で成立するフックの法則の式を紹介する。

A.1 垂直ひずみとせん断ひずみの定義

A.1.1 (x, y) 座標についての垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とせん断ひずみ γ_{xy} について

図 a.1 に示すように、 y 軸に平行な微小長さの線素 AB と x 軸に平行な微小長さ

の線素 BC が板の表面にオイルペンで描かれている. 今, この板に力が働いて, ABC が A'B'C'に移ったと仮定する. 図 a.1 で C''と A''は角度 $\angle B'C''C'=90^\circ$, 角度 $\angle B'A''A'=90^\circ$ となる.

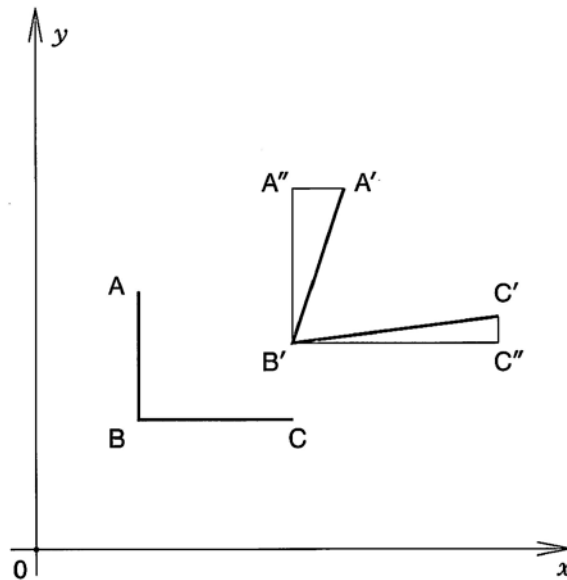


図 a.1

垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は材料力学で定義した場合と同様に, (伸び)/(元の長さ)で定義されるので次式となる.

$$\varepsilon_x = \frac{B'C'' - BC}{BC}, \quad \varepsilon_y = \frac{B'A'' - BA}{BA} \quad (\text{a.1})$$

式(a.1)は実際には, x 方向の変位 u と y 方向の変位 v の偏微分式で与えられるが, 弾性力学の範囲になってしまうので, ここでは式(a.1)で抑えた.

せん断ひずみ γ_{xy} は, 直角の角度が減少した値をラジアン単位で与えて, この減少角で定義する. 図 a.1 の変形前の $\angle ABC$ は $\pi/2$ であるが, $\angle A'B'C'$ は $\pi/2$ から $\angle A''B'A'$ と $\angle C''B'C'$ を加えた角度(ラジアンで表した)だけ減少している. すなわち γ_{xy} は次式で定義される.

$$\gamma_{xy} = \angle A''B'A' + \angle C''B'C' \quad (a.2)$$

垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ と同様に，式(a.2)は実際には， x 方向の変位 u と y 方向の変位 v の偏微分式で与えられるが，ここでは式(a.2)で抑えた。

A.1.2 (r, θ) 座標についての垂直ひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ とせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$

図 a.2 に示すように， (r, θ) 座標を採用する．座標値 r の位置 B から r 座標を伸ばした微小長さの線素 BC と BC に直交する微小長さの線素 BA を板の表面にオイルペンで描く．今，この板に力が働いて，ABC が $A'B'C'$ に移ったと仮定する．図 a.2 で C'' と A'' は $\angle B'C''C' = 90^\circ$ であり， $\angle B'A''A' = 90^\circ$ となる．

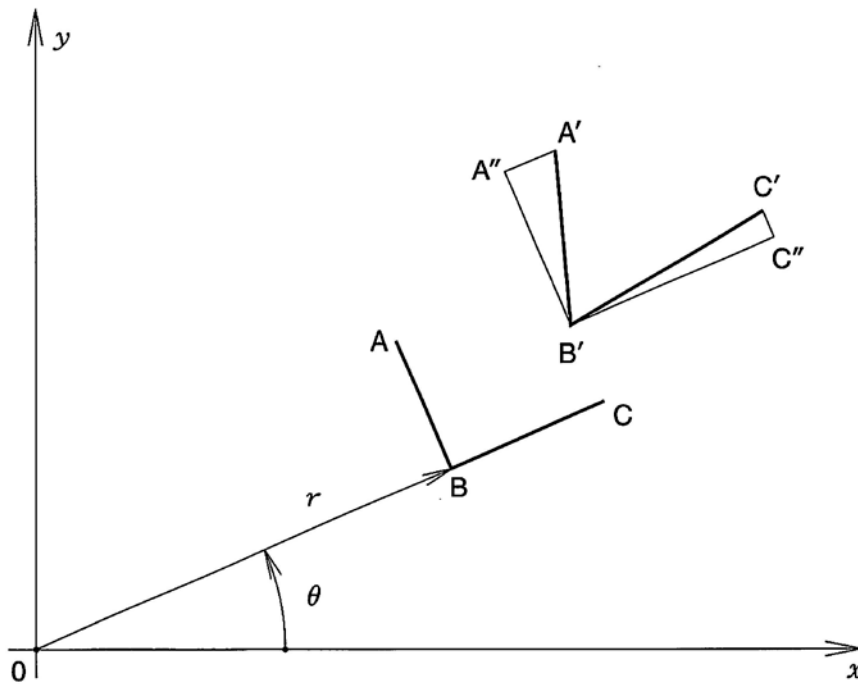


図 a.2

点 B での垂直ひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ は材料力学で定義した場合と同様に，(伸び)/(元の長さ)で定義されるので次式となる．

$$\varepsilon_r = \frac{B'C'' - BC}{BC}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{B'A'' - BA}{BA} \quad (a.3)$$

式(a.3)は実際には， r 方向の変位 u_r と θ 方向の変位 u_θ の偏微分式で与えられ

るが、弾性力学の範囲になってしまうので、ここでは式(a.3)で抑えた。

せん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$ は、直角の角度が減少した値をラジアン単位で与えて、この減少角で定義する。図 a.2 の変形前の $\angle ABC$ は $\pi/2$ であるが、 $\angle A'B'C'$ は $\pi/2$ から $\angle A''B'A'$ と $\angle C''B'C'$ を加えた角度(ラジアンで表した)だけ減少している。すなわち $\gamma_{r\theta}$ は次式で与えられる。

$$\gamma_{r\theta} = \angle A''B'A' + \angle C''B'C' \quad (\text{a.4})$$

垂直ひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ と同様に、式(a.4)は実際には、 r 方向の変位 u_r と θ 方向の変位 u_θ の偏微分式で与えられるが、ここでは式(a.4)で抑えた。

A.2 ひずみ変換式

式(a.3)と式(a.4)のひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ を式(a.1)と式(a.2)のひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ で表わす事は容易ではないので、ここでは、弾性力学入門 [伊藤著, 森北出版]の p.42 の式(3.43)を再記して提示するだけにする。

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{a.5})$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{a.6})$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \theta \cos \theta \quad (\text{a.7})$$

材料の表面にひずみゲージを貼った場合、垂直ひずみのみが与えられて、せん断ひずみは与えられない。普通は、3方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ を測定して、式(a.5)を用いて $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ についての3元連立1次方程式を得て、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ を解く。その後、式(a.30)のフックの法則に代入して $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求める。モールの応力円を描いて主応力 σ_1, σ_2 、最大せん断応力 τ_{\max} を求めて、材料の引張強さ、せん断強さと比較して吟味し、強度を確認すれば良い。

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求める手間を省くためには(どちらがより負担になるかは分からないが)、3方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ を求める。その後、モールのひずみ円を描いて、主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を求める。さらに、式(a.31)で与えられる主ひずみと

主応力間のフックの法則から主応力を求める。この主応力から最大せん断応力も求められる。

A.3 モールのひずみ円

ひずみゲージからは垂直ひずみだけが求められる。どのようにゲージを貼ってもモールのひずみ円は描けるが、ここでは、図 a.3 に示すように 45° をなす 3 方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ が得られた場合を考える。図 a.3 に示すように (x, y) 座標を横方向のゲージに x 軸を一致させて、縦方向のゲージに y 軸を一致させて採用する。図 a.3 で x 軸と反時計方向に α なす方向に主ひずみ ε_1 (最大の垂直ひずみ) が発生する。

薄い板の表面に、 x 軸方向 ($\theta = 0^\circ$ の方向)、 x 軸から $\theta = 45^\circ$ なす方向、 y 軸方向 ($\theta = 90^\circ$ の方向) の 3 方向にひずみゲージを貼った。図 a.3 のゲージで計測される $\theta = 0^\circ$ 、 $\theta = 45^\circ$ 、 $\theta = 90^\circ$ 方向の垂直ひずみをそれぞれ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ とし、モールのひずみ円を描いてみる。ただし、実際にひずみ円を描くために、 $\varepsilon_a > \varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2 > \varepsilon_c > 0$ であるものとする (このように仮定する必要はないが)。

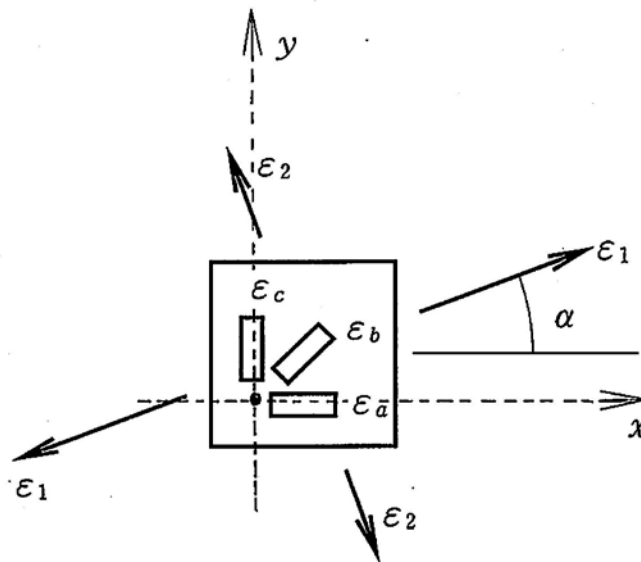


図 a.3

図 a.3 のように (x, y) 座標を採用しているので、 $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ 、 $\varepsilon_y = \varepsilon_c$ となることは直ぐに分かる。3 個の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ から、円を描いて、 x 軸と角 θ なす

r 方向の垂直ひずみ ε_r とせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$ を求める事は、はたして可能なのであろうか。この段階ではやや心配である。

式(a.5), 式(a.6), 式(a.7)に $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ を代入してみると次式を得る。

$\theta=0^\circ$ に対して

$$\varepsilon_r = \varepsilon_a \tag{a.8}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_c \tag{a.9}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{xy} \tag{a.10}$$

$\theta=45^\circ$ に対して

$$\varepsilon_r = \varepsilon_b = \varepsilon_a \frac{1}{2} + \varepsilon_c \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \tag{a.11}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_a \frac{1}{2} + \varepsilon_c \frac{1}{2} - \gamma_{xy} \frac{1}{2} \tag{a.12}$$

$$\gamma_{r\theta} = (\varepsilon_c - \varepsilon_a) = -(\varepsilon_a - \varepsilon_c) \tag{a.13}$$

$\theta=90^\circ$ に対して

$$\varepsilon_r = \varepsilon_c \tag{a.14}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_a \tag{a.15}$$

$$\gamma_{r\theta} = -\gamma_{xy} \tag{a.16}$$

式(a.13)を見れば分かるが、 $\theta=45^\circ$ では $\gamma_{r\theta} = -(\varepsilon_a - \varepsilon_c)$ となっている。この時の垂直ひずみ ε_r は題意より、 $\varepsilon_r = \varepsilon_b$ となる。この事実を利用して、まず、モールのひずみ円を描く事を試みる。

ひずみ円を描くためには、せん断ひずみの式を次式のように2で割った形にしておく必要がある。

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin\theta\cos\theta \tag{a.7}'$$

$$\theta=0^\circ$$

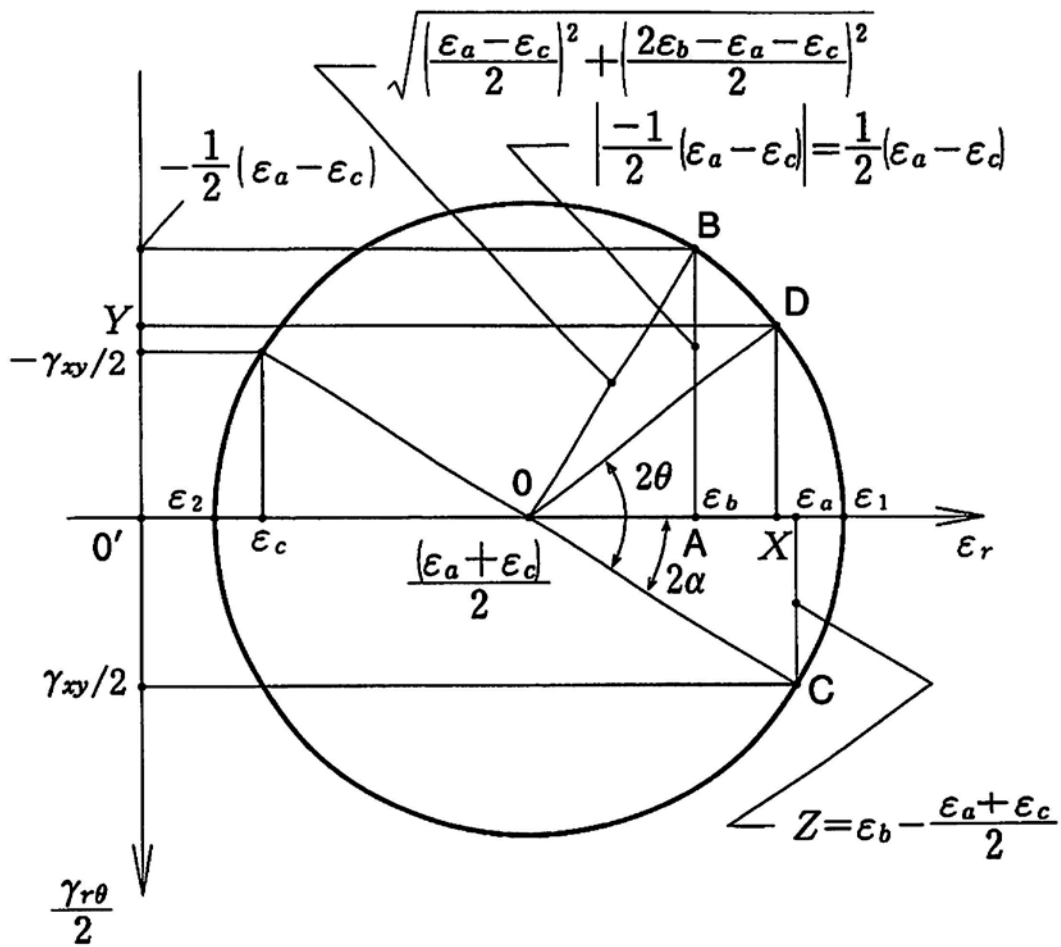
$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (\text{a.10})'$$

$$\theta=45^\circ$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c) \quad (\text{a.13})'$$

$$\theta=90^\circ$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = -\frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (\text{a.16})'$$



⊗ a.4

与えられているデータは、 x 軸となす角度が $\theta=0^\circ$ 、 $\theta=45^\circ$ 、 $\theta=90^\circ$ なす方向の垂直ひずみ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ と $\theta=45^\circ$ でのせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}/2 = -(\varepsilon_a - \varepsilon_c)/2$ だけである。

図 a.4 に示すように、横軸に ε_r を採って、縦軸は下向きに $\gamma_{r\theta}/2$ を採る。 ε_r 軸(横軸)に $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ の値を採って、3本の垂直線を補助線で引いておく。 $\theta=45^\circ$ の ε_r は ε_b となり(与えられている)、この位置のせん断ひずみは式(a.13)'より、 $\gamma_{r\theta}/2 = -(\varepsilon_a - \varepsilon_c)/2$ となるので、 $\varepsilon_r = \varepsilon_b$ の位置 A を通る垂直線上に $\gamma_{r\theta}/2$ の値が $-(\varepsilon_a - \varepsilon_c)/2$ となる点 B をとる。円の中心 O を $[(\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2, 0]$ として、半径を OB として円を描けば、この円がモールのひずみ円となる。

図 a.4 で $\varepsilon_r = \varepsilon_a$ の位置からひずみ円の交点 C までの長さ Z は次式で計算される。

$$\begin{aligned} Z^2 &= \overline{OC}^2 - \left[\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \right]^2 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 = \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 \\ \therefore Z &= \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \end{aligned} \quad (\text{a.17})$$

A.4 主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) と最大せん断ひずみ $\gamma_{r\theta\max}$ の値

図 a.4 より、主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ はひずみ円を描けば目盛を読むことによって求められる。また、図 a.4 のひずみ円から次式も与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \overline{OB} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \overline{OB} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \end{aligned} \quad (\text{a.18})$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \quad (\text{a.19})$$

最大せん断ひずみ $\gamma_{r\theta\max}$ は次式となる.

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta\max} = \overline{OB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}$$

$$\therefore \gamma_{r\theta\max} = \sqrt{2} \times \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \quad (\text{a.20})$$

A.5 モールのひずみ円の証明

図 a.4 の点 B の垂直ひずみが $\varepsilon_r = \varepsilon_b$ で、せん断ひずみの半分 $\gamma_{r\theta}/2$ が $-(\varepsilon_a - \varepsilon_c)/2$ となる. なぜならば、このようになるように円を描いたからである. 図 a.4 の点 D の垂直ひずみ X が式(a.5)で表わされ、せん断ひずみの半分 $\gamma_{r\theta}/2$ である Y が式(a.7)'で与えられる事を示せば証明は終わる.

垂直ひずみ X とせん断ひずみの半分 $\gamma_{r\theta}/2$ である Y は、図 a.4 より次式で与えられる.

$$X = \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} + \overline{OD} \cos(2\theta - 2\alpha) = \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} + \overline{OB} \cos(2\theta - 2\alpha) \quad (\text{a.21})$$

$$Y = -\overline{OD} \sin(2\theta - 2\alpha) = -\overline{OB} \sin(2\theta - 2\alpha) \quad (\text{a.22})$$

式(a.22)の Y の式に マイナスが付いているが、 Y は $\gamma_{r\theta}/2$ の座標の負の位置にあるからである.

三角関数の公式から次式を得る.

$$\begin{aligned} \cos(2\theta - 2\alpha) &= \cos(2\theta)\cos(2\alpha) + \sin(2\theta)\sin(2\alpha) \\ \sin(2\theta - 2\alpha) &= \sin(2\theta)\cos(2\alpha) - \cos(2\theta)\sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (\text{a.23})$$

図 a.4 より、次式を得る.

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \frac{1}{\overline{OC}} \left[\varepsilon_a - \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} \right] = \frac{1}{\overline{OB}} \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] \\ \sin(2\alpha) &= \frac{1}{\overline{OC}} \times \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{\overline{OB}} \times \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{aligned} \quad (\text{a.24})$$

式(a.24)を式(a.23)に適用して次式となる.

$$\begin{aligned}\cos(2\theta - 2\alpha) &= \cos(2\theta) \frac{1}{\text{OB}} \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] + \sin(2\theta) \frac{1}{\text{OB}} \times \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \sin(2\theta - 2\alpha) &= \sin(2\theta) \frac{1}{\text{OB}} \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] - \cos(2\theta) \frac{1}{\text{OB}} \times \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{aligned}\tag{a.25}$$

よって, X と Y は次式となる.

$$\begin{aligned}X &= \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} + \cos(2\theta) \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] + \sin(2\theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ &= \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ &= \cos^2 \theta \left[\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c + \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right] + \sin^2 \theta \left[\frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} \right] + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ &= \cos^2 \theta \varepsilon_a + \sin^2 \theta \varepsilon_c + \sin \theta \cos \theta \gamma_{xy} = \cos^2 \theta \varepsilon_x + \sin^2 \theta \varepsilon_y + \sin \theta \cos \theta \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{a.26}$$

故に

$$\varepsilon_r = \cos^2 \theta \varepsilon_a + \sin^2 \theta \varepsilon_c + \sin \theta \cos \theta \gamma_{xy} = \cos^2 \theta \varepsilon_x + \sin^2 \theta \varepsilon_y + \sin \theta \cos \theta \gamma_{xy}\tag{a.27}$$

$$\begin{aligned}
Y &= -\overline{OD} \sin(2\theta - 2\alpha) = -\overline{OB} \sin(2\theta - 2\alpha) \\
&= -\overline{OB} \times \left\{ \sin(2\theta) \frac{1}{\overline{OB}} \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] - \cos(2\theta) \frac{1}{\overline{OB}} \times \frac{\gamma_{xy}}{2} \right\} \\
&= -\left\{ \sin(2\theta) \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] - \cos(2\theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \right\} \\
&= -\sin(2\theta) \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] + \cos(2\theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \\
&= -2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}{2} \right] + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \\
&= 2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_a)}{2} \right] + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \\
&= 2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{2} \right] + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \tag{a.28}
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\theta}/2 &= Y = 2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{2} \right] + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\gamma_{xy}}{2} \\
\gamma_{r\theta} &= 2Y = 2 \sin \theta \cos \theta (\varepsilon_y - \varepsilon_x) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \gamma_{xy} \tag{a.29}
\end{aligned}$$

式(a.27)は式(a.5)に一致し、式(a.29)は式(a.7)に一致したので、証明は完了した。

A.6 モールのひずみ円の見方

図 a.4 のモールのひずみ円上の 1 点の値が x 軸から θ なす方向の ε_r と $\gamma_{r\theta}/2$ の値を示す。 $\theta = 0$ の ε_r と $\gamma_{r\theta}/2$ はひずみ円の点 C の値で与えられる。 x 軸から θ なす方向の ε_r と $\gamma_{r\theta}/2$ は線分 OC を反時計方向に 2θ だけ進めたひずみ円上の点 D の値で与えられる(A.5 節で証明されている)。垂直応力が最大となる主ひずみ ε_1 はひずみ円上では線分 OC を反時計方向に 2α 進めた円上の値になるが、物理空間では、図 a.3 に示すように、 x 軸から反時計方向に α なす方向の垂直ひずみ ε_r となる。

A.7 フックの法則

薄い板の端に引張荷重などが加えられた時は、板は平面応力状態にあるとか、平面応力であると言う。板でなくても、物体の表面は必ず平面応力状態になっている。この時のフックの法則を導くのは弾性力学の範囲に入るので、結果のみを記載しておく。弾性力学入門[伊藤著、森北出版]の式(2.4)を転記して平面応力のフックの法則を記せば次式となる。

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (\text{a.30})$$

ここで、 ν はポアソン比であり、 E はヤング率である。図 a.4 から分かるように、せん断ひずみ $\gamma_{r\theta}=0$ の時の垂直ひずみが主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ となる。 ε_1 が働く方向に x 軸を合わせて、式(a.30)を借用すれば次式を得る。

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = 0 \quad (\text{a.31})$$

最大せん断応力は、モールの応力円から得られているが、次式で計算しておけば良い。

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{a.32})$$