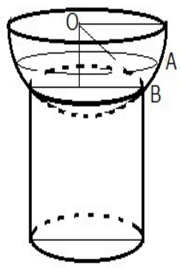
演習問題の一部詳細解答

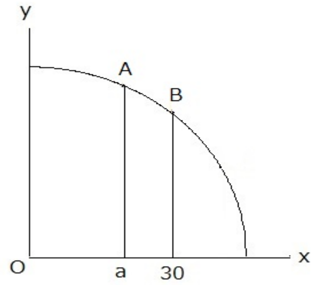
1.4

弧 AB を x 軸 の周りに回転してできる
立体の体積 V は，円柱からあふれる
水の量に等しいから，

$$V = \pi \int_a^{30} y^2 dx = \pi \int_a^{30} (50^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \Big\{ \frac{1}{3} a^3 - 2500a + 66000 \Big\}$$





一方，あふれる水の量は，

$$80000\pi - 40^3\pi = 16000\pi$$

したがって，次の方程式が成り立つ．

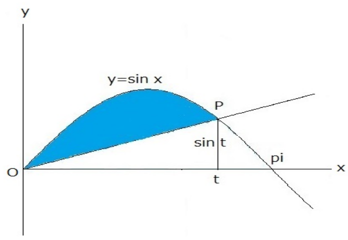
$$\frac{1}{3} a^3 - 2500a + 66000 = 16000. \quad \therefore \quad a^3 - 7500a + 150000 = 0$$

この方程式を解けばよいが，a を x に書き換えて，$x^3 - 7500x + 150000 = 0$ を
ニュートン法で解けばよい．　$(x = 21.3\cdots)$

1.5

曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 2 であること
は積分すれば容易にわかる．したがって，色塗りした部分
の面積を V とすると，題意より，$V = 1$ となる．

また，直線 OP の傾きは $\dfrac{\sin t}{t}$ だから，直線 OP の方程式は
$y = \dfrac{\sin t}{t} x$ で表される．したがって，



$$V = \int_0^t \Big(\sin x - \frac{\sin t}{t} x \Big) dx = \Big[-\cos x - \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^t = -\cos t - \frac{1}{2} t \sin t + 1.$$

ゆえに，次の方程式が得られる．

$$-\cos t - \frac{1}{2} t \sin t + 1 = 1 \quad \therefore \quad 2\cos t + t \sin t = 0.$$

これをニュートン法で t について解けばよい．　$(t = 2.4578\cdots)$

2.2 (2)

拡大係数行列を掃き出していく．

2	8	2	−3	2
4	6	−2	−1	1
2	−4	−2	−1	3
1	−5	2	1	−2
1	−5	2	1	−2
2	8	2	−3	2
4	6	−2	−1	1
2	−4	−2	−1	3

1	−5	2	1	−2
0	18	−2	−5	6
0	26	−10	−5	9
0	6	−6	−3	7
1	−5	2	1	−2
0	1	−1/9	−5/18	1/3
0	26	−10	−5	9
0	6	−6	−3	7

1	0	13/9	−7/18	−1/3
0	1	−1/9	−5/18	1/3
0	0	−64/9	20/9	1/3
0	0	−16/3	−4/3	5

1	0	13/9	−7/18	−1/3
0	1	−1/9	−5/18	1/3
0	0	1	−5/16	−3/64
0	0	−16/3	−4/3	5

1	0	0	3/48	−17/64
0	1	0	−5/16	21/64
0	0	1	−5/16	−3/64
0	0	0	−3	19/4

1	0	0	3/48	−17/64
0	1	0	−5/16	21/64
0	0	1	−5/16	−3/64
0	0	0	1	−19/12

1	0	0	0	−1/6
0	1	0	0	−1/6
0	0	1	0	−13/24
0	0	0	1	−19/12

$$\therefore \quad \begin{aligned} x &= -1/6 = -0.166667 \\ y &= -1/6 = -0.166667 \\ z &= -13/24 = -0.541667 \\ w &= -19/12 = -1.583333 \end{aligned}$$

2.3 (2)

拡大係数行列を掃き出していく.

0	−3	2	1	−7
3	2	−3	0	−1
1	2	−3	2	3
−3	4	1	2	9

1	2	−3	2	3
0	−3	2	1	7
3	2	−3	0	−1
−3	4	1	2	9

1	2	−3	2	3
0	−3	2	1	7
0	−4	6	−6	−10
0	10	−8	8	18

1	0	−5/3	8/3	23/3
0	1	−2/3	−1/3	−7/3
0	−2	−3	3	5
0	5	−4	4	9

1	0	−5/3	8/3	23/3
0	1	−2/3	−1/3	−7/3
0	0	−5/3	11/3	29/3
0	0	−2/3	17/3	62/3

1	0	−5/3	8/3	23/3
0	1	−2/3	−1/3	−7/3
0	0	1	−11/5	−29/5
0	0	−2/3	17/3	62/3

1	0	0	−1	−2
0	1	0	−9/5	−31/5
0	0	1	−11/5	−29/5
0	0	0	21/5	84/5

1	0	0	−1	−2
0	1	0	−9/5	−31/5
0	0	1	−11/5	−29/5
0	0	0	1	4

1	0	0	0	2
0	1	0	0	1
0	0	1	0	3
0	0	0	1	4

$$\therefore \quad x = 2, y = 1, z = 3, u = 4$$

2.5 (3)

拡大係数行列とその右に単位行列を書いて掃き出していく.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
-3 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -5 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -5 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr}
1 & 0 & 0 & 50 & -11 & 9 \\
0 & 1 & 0 & 22 & -5 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 50 & -11 & 9 \\
0 & 1 & 0 & 22 & -5 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

ゆえに，逆行列は次の通り.

$$
\begin{bmatrix}
50 & -11 & 9 \\
22 & -5 & 4 \\
-5 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

2.7 (1)

拡大係数行列を書いて掃き出していく.

$$
\begin{array}{rrrr}
1 & 1 & -1 & 0 \\
5 & 2 & -6 & 0 \\
4 & 1 & -5 & 0 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -3 & -1 & 0 \\
0 & -3 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & -4/3 & 0 \\
0 & 1 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

ゆえに，$z = 3t$ とおくと，
$y = -t,\ \ x = 4t$ となる.

$$
\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t \\ -t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{(t は任意定数)}
$$

2.8 (1)

拡大係数行列を書いて掃き出していく.

$$
\begin{array}{lrrrr}
2 & 1 & -4 & 5 & -1 \\
3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0.5 & -2 & 2.5 & -0.5 \\
3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0.5 & -2 & 2.5 & -0.5 \\
0 & -0.5 & 4 & -6.5 & 4.5 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
1 & 0.5 & -2 & 2.5 & -0.5 \\
0 & 1 & -8 & 13 & -9 \\
\hline
1 & 0 & 2 & -4 & 4 \\
0 & 1 & -8 & 13 & -9 \\
\hline
\end{array}
$$

したがって，$z = s, u = t$ とおくと，
$x = 4 - 2s + 4t, y = -9 + 8s - 13t$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2s+4t \\ -9+8s-13t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ -13 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (t, s\text{ は任意定数})$$

2.9

題意を表にすると次のようになる．

製品 原料	A	B	C	原料 制限
P	1 kg	2 kg	1 kg	6 kg
Q	1	3	2	8
R	2	2	3	13
利益	2 万円	2.5 万円	3 万円	
製造量	x kg	y kg	z kg	

製品 A,B,C をそれぞれ x, y, zkg 製造したときの利益を f 万円とする．題意より，

$$f = 2x + 2.5y + 3z$$

原料の制限より，

$$\begin{cases} x + 2y + z \leq 6 & (P\text{ の制限}) \\ x + 3y + 2z \leq 8 & (Q\text{ の制限}) \\ 2x + 2y + 3z \leq 13 & (R\text{ の制限}) \end{cases}$$

この制限のもとに f の最大値を求めればよい．そのために，まず，

$$u = 6 - (x + 2y + z),\ v = 8 - (x + 3y + 2z),\ w = 13 - (2x + 3y + 3z)$$

とおく．制約条件から，u, v, w はすべて正または 0 となり．次の方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} x + 2y + z + u = 6 \\ x + 3y + 2z + v = 8 \\ 2x + 2y + 3z + w = 13 \end{cases}$$

この連立方程式を満たす非負の x, y, z, u, v, w を求めればよい．
拡大係数行列を書いて掃き出していく．

1	2	1	1	0	0	6
1	2	2	0	1	0	8
2	2	3	0	0	1	13
1	2	1	1	0	0	6
0	1	1	−1	1	0	2
0	−2	1	−2	0	1	1
1	0	−1	3	−2	0	2
0	1	1	−1	1	0	2
0	0	3	−4	−2	1	5
1	0	−1	3	−2	0	2
0	1	1	−1	1	0	2
0	0	1	−4/3	−2/3	1/3	5/3
1	0	0	5/3	−8/3	1/3	11/3
0	1	0	5/3	5/3	−1/3	1/3
0	0	1	−4/3	−2/3	1/3	5/3

これより，x, y, z は，

$$x = \frac{1}{3}\{11 - (5u - 8v + w)\}$$

$$y = \frac{1}{3}\{1 - (5u + 5v - w)\}$$

$$z = \frac{1}{3}\{5 - (-4u + 2v + w)\}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} f &= \frac{2}{3}(11 - 5u + 8v - w) \\ &\quad + \frac{5}{6}(1 - 5u - 5v + w \\ &\quad + (5 + 4u + 2v - w \\ &= \frac{1}{6}(79 - 11u - 5v - 5w) \leq \frac{79}{6} \end{aligned}$$

$(u, v, w$ は非負だから$)$

したがって，f が最大値になるのは，$u = v = w = 0$ のときで，$x = 11/3, y = 1/3, z = 5/3$ のときである．このとき f の最大値は $79/6$(万円) となる．
つまり，製品 A, B, C をそれぞれ 11/3kg ,1/3kg , 5/3kg ずつ製造すればよい．

3.4 (1)

ラグランジュの補間多項式 $f(x)$ で $x=0.8$ を代入した式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
f(0.8) = &\frac{(0.8-1.0)(0.8-1.5)(0.8-2.0)}{(0.5-1.0)(0.5-1.5)(0.5-2.0)} \times 0.3734 \\
&+ \frac{(0.8-0.5)(0.8-1.5)(0.8-2.0)}{(1.0-0.5)(1.0-1.5)(1.0-2.0)} \times 0.5104 \\
&+ \frac{(0.8-0.5)(0.8-1.0)(0.8-2.0)}{(1.5-0.5)(1.5-1.0)(1.5-2.0)} \times 0.4712 \\
&+ \frac{(0.8-0.5)(0.8-1.0)(0.8-1.5)}{(2.0-0.5)(2.0-1.0)(2.0-1.5)} \times 0.3345 \\
&= 0.0836416 + 0.5144832 - 0.1357056 + 0.018732 \\
&= 0.4811512
\end{aligned}
$$

よって，$f(0.8)$ の近似値として，$f(0.8)=0.48115$ を得る．

3.6

3.4 (1) について行う．(例題 3.5 参照)

まず，差商を計算する．

第 1 階差商：

$$f[0.5, 1.0] = \frac{0.3734 - 0.5104}{0.5-1.0} = 0.274$$

$$f[1.0, 1.5] = \frac{0.5104 - 0.4712}{1.0-1.5} = -0.0784$$

$$f[1.5, 2.0] = \frac{0.4712 - 0.3345}{1.5-2.0} = -0.2734$$

第 2 階差商：

$$f[0.5, 1.0, 1.5] = \frac{0.274 + 0.0784}{0.5-1.5} = -0.3524$$

$$f[1.0, 1.5, 2.0] = \frac{-0.0784 + 0.2734}{1.0-2.0} = -0.195$$

第 3 階差商：$f[0.5, 1.0, 1.5, 2.0] = \dfrac{-0.3524 + 0.195}{0.5-2.0} = 0.1049$

以上の計算は実際には次のように表を作って計算すれば能率的である．

x	$f(x)$	第 1 階	第 2 階	第 3 階
0.5	0.3734	0.274	-0.3524	0.1049
1.0	0.5104	-0.0784	-0.195	
1.5	0.4712	-0.2734		
2.0	0.3345			

以上により，

$$
\begin{aligned}
f(0.8) &= 0.3734 + 0.274 \cdot (0.8-0.5) - 0.3524 \cdot (0.8-0.5)(0.8-1.0) \\
&\quad + 0.1049 \cdot (0.8-0.5)(0.8-1.0)(0.8-1.5) + R_4 \\
&= 0.4811498 + R_4
\end{aligned}
$$

よって，R_4 を削除すると，$f(0.8)$ の近似として，$f(0.8)=0.48115$ を得る．

3.7 (2)
(例題 3.7 参照)

ニュートンの前進補間公式

$$f(x) = f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 f_0 + R_3$$

を適用する．いま，$h = 0.5,\ x_0 = 10,\ x = 22$ だから，$k = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{22 - 10}{5} = 2.4$

$$\therefore \quad f(22) = f_0 + \binom{2.4}{1}\Delta f_0 + \binom{2.4}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{2.4}{3}\Delta^3 f_0 + R_3$$

差分表をつくる．

x	$f(x)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
10	367.879	385.185	-55.569	-74.147
15	753.064	329.616	-129.716	
20	1082.68	199.90		
25	1282.58			

表より，$\Delta f_0 = 385.185,\ \Delta^2 f_0 = -55.569,\ \Delta^3 f_0 = -74.147$ だから，

$$\begin{aligned} f(22) &= 367.879 + 2.4 \cdot 385.185 + \frac{2.4 \cdot 1.4}{2} \cdot (-55.569) + \frac{2.4 \cdot 1.4 \cdot 0.4}{3 \cdot 2} \cdot (-74.147) \\ &= 367.879 + 924.444 - 93.35592 - 16.608928 \\ &= 1182.358152 \end{aligned}$$

ゆえに，$f(22) = 1182.36$ を得る．

4.5
(ポイント 4.3 参照)

題意より R の変化量ΔR が t の変化量Δt に比例するから，比例定数を a とすれば，

$$\Delta R = a\Delta t \quad \therefore \quad \frac{\Delta R}{\Delta t} = a \quad \therefore \quad \frac{dR}{dt} = a \quad \therefore \quad R = at + c \quad (c \text{ は積分定数})$$

R, t のデータを $R = at + c$ に代入して，

$$\begin{cases} 18a + c = 15.2 \\ 28a + c = 15.9 \\ 38a + c = 16.7 \\ 48a + c = 16.9 \\ 58a + c = 17.4 \\ 68a + c = 18.0 \\ 78a + c = 18.7 \\ 88a + c = 19.3 \\ 98a + c = 19.8 \end{cases}. \qquad \text{これより，} A = \begin{bmatrix} 18 & 1 \\ 28 & 1 \\ 28 & 1 \\ 48 & 1 \\ 58 & 1 \\ 68 & 1 \\ 78 & 1 \\ 88 & 1 \\ 98 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15.2 \\ 15.9 \\ 16.7 \\ 16.9 \\ 17.4 \\ 18.0 \\ 18.7 \\ 19.3 \\ 19.8 \end{bmatrix},$$

これより最小２乗法の正規方程式の ${}^tA(A\ \ \boldsymbol{b})$ を作ると，

$$
{}^tA(A\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 18 & 28 & 38 & \cdots & 88 & 98 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 1 & 15.2 \\ 28 & 1 & 15.9 \\ 38 & 1 & 16.7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 78 & 1 & 18.7 \\ 88 & 1 & 19.3 \\ 98 & 1 & 19.8 \end{bmatrix}
$$

この行列の積を計算すると，

$$
\begin{bmatrix} 36276 & 522 & 9495.2 \\ 522 & 9 & 157.9 \end{bmatrix} \qquad \text{すなわち，連立方程式} \begin{cases} 36276a + 522c = 9495.2 \\ 522a + 9c = 157.9 \end{cases}
$$

を得る．これを掃き出して解く．

36276	522	9495.2
522	9	157.9
1	0.0143897	0.2617488
522	9	157.2
1	0.0143897	0.2617488
0	1.4886288	21.267544
1	0.0143897	0.2617488
0	1	14.286667
1	0	0.0561679
0	1	14.286667

$$\therefore \quad a = 0.056168, c = 14.286667$$

$$\therefore \quad R = 0.056168t + 14.2867$$

4.6 (2)

(ポイント 4.3 法参照)

$y = ae^{bx}$ の両辺の自然対数をとると，$\log y = \log a + bx$

$\log y = Y$，$\log a = c$ とおくと，$Y = c + bx$ となる．

x, y に関する与えられたデータを x, Y に関するデータに書き直すと，

x	1.0	2.0	3.0	4.0
Y	0.916291	2.079445	2.944438	3.806662

このデータから，c, b の間には，次の等式が成り立たなければならない．

$$
\begin{cases} c + b = 0.916291 \\ c + 2b = 2.079445 \\ c + 3b = 2.944438 \\ c + 4b = 3.806662 \end{cases} \qquad \text{これより，} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.916291 \\ 2.079445 \\ 2.944438 \\ 3.806662 \end{bmatrix}
$$

これから最小２乗法の正規方程式の ${}^tA(A\ \ \boldsymbol{b})$ を作ると，

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.916291 \\ 1 & 2 & 2.079445 \\ 1 & 3 & 2.944438 \\ 1 & 4 & 3.806662 \end{bmatrix}
$$

この行列式の積を計算すると，

$$
\begin{bmatrix} 4 & 10 & 9.746836 \\ 10 & 30 & 29.135143 \end{bmatrix}
$$

これを掃き出し法で解く．

$$\begin{array}{ccc} 4 & 10 & 9.746836 \\ 10 & 30 & 29.135143 \\ \hline 1 & 2.5 & 2.436709 \\ 10 & 30 & 29.135143 \\ \hline 1 & 2.5 & 2.436709 \\ 0 & 5 & 4.768053 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2.5 & 2.436709 \\ 0 & 1 & 0.953611 \\ \hline 1 & 0 & 0.052682 \\ 0 & 1 & 0.953611 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \quad c = 0.052682, \quad b = 0.953611$

$\log a = c$ より，$a = e^c$

$\therefore \quad a = e^c = e^{0.052682} = 1.05409$

以上により，$y = 1.05409\, e^{0.953611x}$ となる．

4.7 (2)
(ポイント 4.3 参照)

支点からの距離 x (mm)	0	300	500	700	900
たわみ量 y (mm)	0	0.7	0.9	1.2	1.3

あてはめ曲線 $y = ax^{\frac{3}{5}} + b$ にデータを代入すると，

$$\begin{cases} 0a + b = 0 \\ 30.6388706a + b = 0.7 \\ 41.6276604a + b = 0.9 \\ 50.9399863a + b = 1.2 \\ 59.2305146a + b = 1.3 \end{cases} \text{．これより，} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 30.6388706 & 1 \\ 41.6276604 & 1 \\ 50.9399863 & 1 \\ 59.2305146 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

これから最小 2 乗法の正規方程式の ${}^tA(A \quad \boldsymbol{b})$ を作ると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 30.6388706 & 41.6276604 & 50.9399863 & 59.2305146 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 30.6388706 & 1 & 0.7 \\ 41.6276604 & 1 & 0.9 \\ 50.9399863 & 1 & 1.2 \\ 59.2305146 & 1 & 1.3 \end{bmatrix}$$

この行列の積を計算して，次の連立方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} 8774.738566 & 182.4370319 & 197.0397563 \\ 182.4370319 & 5 & 4.1 \end{bmatrix}$$

これを掃き出して解く．

$$\begin{array}{ccc} 8774.738566 & 182.4370319 & 197.0397563 \\ 182.4370319 & 5 & 4.1 \\ \hline 1 & 0.02079116 & 0.02245534 \\ 182.4370319 & 5 & 4.1 \\ \hline 1 & 0.02079116 & 0.02245534 \\ 0 & 1.20692248 & 0.00331442 \\ \hline 1 & 0.0207916 & 0.02245534 \\ 0 & 1 & 0.00274617 \\ \hline 1 & 0 & 0.02239824 \\ 0 & 1 & 0.00274617 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \quad a = 0.02239824, b = 0.00274617$

以上より，a, b を丸めて，

$a = 0.0224, \quad b = 0.00275$

よって，$y = 0.0224x^{\frac{3}{5}} + 0.00275$

5.3
(ポイント 5.1、例題 5.2 等参照)

$y = x^3 + 2x^2 - x + 1$．いま，$T_3(x) = 4x^3 - 3x$ だから，ポイント 5.1 により，

$T_3(x) = 0$ とおくと，$x^3 = \dfrac{3}{4}x$．これを $Q_3(x)$ に代入して，

$$Q_3(x) = \frac{3}{4}x + 2x^2 - x + 1 = 2x^2 - \frac{1}{4}x + 1$$

ゆえに，y の最良多項式は $y = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x + 1$

5.4 (2)
(ポイント 5.1、例題 5.1 等参照)

まず，$y = e^x$ をテイラー展開する．

$$y = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

R_n を打ち切ったとき生じる誤差が 0.0001 未満であるためには，$x \in [-1, 1]$ および
$0 < \theta < 1$ を考慮すれば，

$$|R_n| = \left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right| \leq \frac{e}{n!} < 0.0001 \qquad \therefore \quad n! > \frac{e}{0.0001} = 1000e = 2718.281\cdots$$

を n は満たさなければならない．これを満たす最小の n は，$n = 8$ である．このとき，

$$|R_8| \leq \frac{e}{8!} < 0.0000675$$

したがって，まず e^x のテイラー展開として，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + R_8$$

を考える．この式で R_8 を打ち切った式を $a(x)$ とする．

$$a(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7$$

このとき，$|e^x - a(x)| = |R_8(x)| \leq 0.000068$ である．さらに，表 5.1 より，

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \qquad \therefore \quad x^7 = \frac{1}{64}\{7x - 56x^3 + 112x^5 + T_7(x)\}$$

これを $a(x)$ に代入して整理すれば，

$$a(x) = 1 + \frac{46081}{46080}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{959}{5760}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{5}{576}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{7!\cdot 64}T_7(x)$$

ここで，最後の $T_7(x)$ の項を除いた式を $A(x)$ とおく．すると，

$$a(x) = A(x) + \frac{1}{7!\cdot 64}T_7(x)$$

と書けるから，

$$|a(x) - A(x)| = \left|\frac{1}{7!\cdot 64}T_7(x)\right| \leq \frac{1}{322560} = 0.0000032$$

したがって，e^x の近似値として $A(x)$ をとれば，そのときの誤差は，

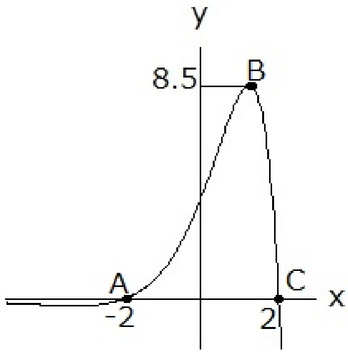
$$|e^x - A(x)| = \left|e^x - \{a(x) - \frac{1}{7!\cdot 64}T_7(x)\}\right| \leq |e^x - a(x)| + \left|\frac{1}{7!\cdot 64}T_7(x)\right|$$
$$< 0.000068 + 0.0000032 = 0.0000712 < 0.0001$$

以上により，e^x の近似式として，

$$A(x) = 1 + \frac{46081}{46080}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{959}{5760}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{5}{576}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

を考えれば，この $A(x)$ は許容誤差の限界 0.0001 を超えない最も次数の低い近似式となる．

6.2



まず，曲線 $y = (4 - x^2)e^x$ の形状を調べる．
x 軸との交点は $y = 0$ より，$(4 - x^2)e^x = 0$．
$e^x \neq 0$ だから，$4 - x^2 = 0 \quad \therefore \quad 4 - x^2 = 0$
したがって，$x = -2$，2 となる．
次に，極値を調べる．

$y' = (4 - 2x - x^2)e^x$，$y' = 0$ より，

$4 - 2x - x^2 = 0 \quad \therefore \quad x = -1 \pm \sqrt{5}$

$(x = 1.23\cdots \quad と \quad x = -3.23\cdots)$

$y' > 0$ となるのは，$4 - 2x - x^2 > 0$，つまり，$x^2 + 2x - 4 < 0$ のときである．

$-1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5}$　で y は増加

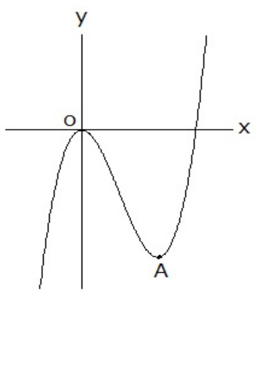
$x < -1 - \sqrt{5}$　または　$-1 + \sqrt{5} < x$　で y は減少

したがって，$x = -1 - \sqrt{5} = -3.23\cdots$ で極小，$x = -1 + \sqrt{5} = 1.23\cdots$ で極大．
これより，$y = (4 - x^2)e^x$ のグラフは右上の図のようになる．

求める曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)e^x dx$ で表される．

この積分をパソコンを用いてポイント 6.2 で計算すると，$S = 15.59\cdots$ が得られる．
なお，数学的にこの積分を求めると，$S = 2(e^2 + 3e^{-2}) = 15.590123\cdots$ となる．

6.4



まず，$y = x^3 - 3x^2$ の極値点を求める．

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，$y'' = 6x - 6$

$x = 0$ で $y' = 0, y'' < 0$．点 $O(0, 0)$ は極大点，
$x = 2$ で $y' = 0, y'' > 0$．点 $A(2, -4)$ は極小点．
曲線弧 OA の長さを s とすると，

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x^2(x - 2)^2}dx$$

これをパソコンで数値積分すると，$s = 4.59203$ を得る．

6.7.(3)

次の二重積分の値を求める．

$$I = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy,\quad D:(x-1)^2+y^2 \le 1,\quad y \ge 0$$

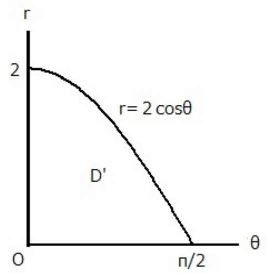
(解) 領域 D 内の任意の点を $P(x,y)$ とし，P の極座標を (r,θ) とおき，(r,θ) の領域を D' とする．領域 D' は次の式および下の図で表される．

$$D' \;: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le r \le 2\cos\theta$$

このとき，x, y と r, θ の間には，次の関係が成り立つ．

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

二重積分の極座標変換の公式により、

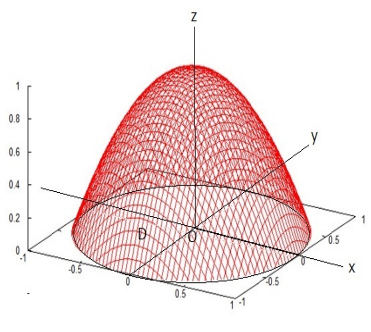


$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy \\
&= \iint_{D'} \sqrt{4-r^2}\; r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big\{ \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}\; rdr \Big\} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} \Big]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \Big\{ (4-4\cos^2\theta)^{3/2} - 4^{3/2} \Big\} d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \Big\{ (4\sin^2\theta)^{3/2} - 8 \Big\} d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (8\sin^3\theta - 8) d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1) d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4}{9}\Big(3\pi - 4\Big) = 2.4110\cdots
\end{aligned}$$

6.8 (2)

曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$ の曲面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy
\end{aligned}$$

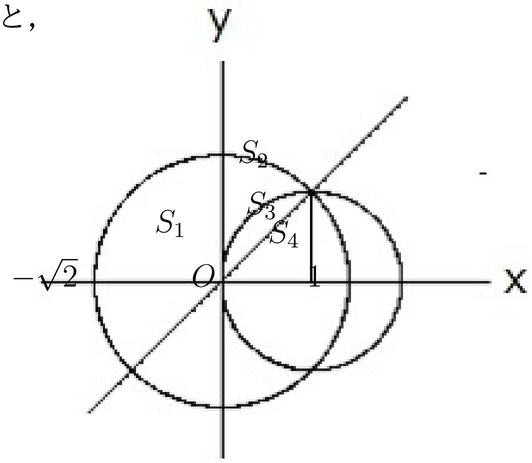


ここに，D は xy 平面が曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ によって囲まれる部分で，$D: x^2+y^2 \le 1$ で表される．よって，

$$S = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

これをプログラム 6.6 を用いて計算すると，$S = 5.3304135$ となる．

6.10 (3)



半径 $\sqrt{2}$と 1 の円の面積をそれぞれ A, B とすると，

$A = 2\pi, B = \pi$ である．また，

$$S_1 = \frac{1}{4}A = \frac{1}{2}\pi,\ \ S_4 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{8}A - S_3 = \frac{1}{4}\pi - (\frac{1}{4}B - S_4)$$

$$= \frac{1}{4}\pi - \Big(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad S = S_1 + S_2 = \frac{\pi + 1}{2} = 2.0707\cdots$$

重心の公式で $\psi(x)$ と$\phi(x)$ は，次のようになる．

$$\psi(x) = \sqrt{2 - x^2}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} 0 & (-\sqrt{2} \leq x \leq 0) \\ \sqrt{2x - x^2} & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

したがって，

$$X = \frac{1}{S}\int_{-\sqrt{2}}^{1} x\{\psi(x) - \phi(x)\}dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\int_{-\sqrt{2}}^{0} x\{\psi(x) - \phi(x)\}dx + \int_0^1 x\{\psi(x) - \phi(x)\}dx\Big]$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\int_{-\sqrt{2}}^{0} x\sqrt{2 - x^2}dx + \int_0^1 x\{\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2x - x^2}\}dx\Big]$$

右辺の 2 つの積分をそれぞれ I_1, I_2 とおく．すなわち，

$$I_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{0} x\sqrt{2 - x^2}dx, \qquad I_2 = \int_0^1 x\{\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2x - x^2}\}dx$$

I_1, I_2 をプログラムを用いてパソコンで計算すると (たとえばシンプソンの公式で)，

$$I_1 = -0.9421,\ \ I_2 = 0.1574$$

したがって，

$$X = \frac{1}{S}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2.070796} \times \ (-0.9421 + 0.1574) = -0.3789$$

Y についても同様にして求めてもよいが，積分は求積法で簡単に求められる．

$$Y = \frac{1}{2S}\int_{-\sqrt{2}}^{1}\{\psi(x)^2 - \phi(x)^2\}dx$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{\psi(x)^2 - \phi(x)^2\}dx + \int_0^1\{\psi(x)^2 - \phi(x)^2\}dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\int_{-\sqrt{2}}^{0}(2 - x^2)dx + \int_0^1(2 - 2x)dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1\Big) = \frac{1}{\pi + 1}\cdot\frac{4\sqrt{2} + 3}{3} = 0.6967\cdots$$

以上により，重心は $(-0.379, 0.697)$ となる．

7.1 (2)

いま，$f(x,y) = e^{-\sin x} - y\cos x$ である．刻み幅 $h = 0.1$ として求める．
$y(0) = 1$ だから，ポイント 7.3 の公式を用いて表を作って計算する．

x	y	$f(x,\,y)$	k_i
0.00	1.0000	0.0000	$k_1 : 0.00000$
0.05	1.0000	-0.04750	$k_2 : -0.00475$
0.05	0.9976	-0.04510	$k_3 : -0.00451$
0.1	0.9955	-0.08553	$k_4 : -0.00855$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -\frac{1}{6}\times\ 0.02707 = -0.0045116$$

$$\therefore\quad y(0.1) = 1.0 - 0.004511 = 0.995489. \qquad \therefore\quad y(0.1) = 0.99549$$

次に，$y(0.2)$ を求める．

x	y	$f(x,\,y)$	k_i
0.1	0.99549	-0.08553	$k_1 : -0.008553$
0.15	0.99121	-0.11889	$k_2 : -0.011890$
0.15	0.98955	-0.11725	$k_3 : -0.011725$
0.2	0.98377	-0.14434	$k_4 : -0.014434$

.

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -\frac{1}{6}\times\ 0.070191 = -0.01169867$$

$$\therefore\quad y(0.2) = 0.99549 - 0.011699 = 0.983791 \qquad \therefore\quad y(0.2) = 0.98379$$

7.4

微分方程式 $x^2y'' - xy' + y = x^2$，初期条件 $y(1) = 2,\ y'(1) = 0$ (1)
いま，$z = y'(x)$ とおくと，(1) は次の連立微分方程式に書き換えられる．

$$\text{連立微分方程式}\quad \begin{cases} x^2z' - xz + y = x^2, & y(1) = 2 \\ z = y', & z(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

これに，ルンゲ・クッタ 4 次公式を適用するために，(2) を次のように変形する．

$$\text{連立微分方程式}\quad \begin{cases} y' = z, & y(1) = 2 \\ z' = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{x^2} + 1, & z(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ポイント 7.4 の公式にいう f, g は，$f(x,y,z) = z$，$g(x,y,z) = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{x^2} + 1$ である．
刻み幅 h を $h = 0.1$ にとるから，次の表ができる．

x	y	z	$k_i = hf(x,y,z)$	$l_i = hg(x,y,z)$
1.0000	2.0000	0.00000	$k_1 : 0.00000$	$l_1 : -0.100000$
1.0500	2.0000	-0.05000	$k_2 : -0.00500$	$l_2 : -0.086168$
1.0500	1.9977	-0.04308	$k_3 : -0.00431$	$l_3 : -0.085282$
1.1000	1.9957	-0.08853	$k_4 : -0.00853$	$l_4 : -0.072686$

よって，$k=\dfrac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=\dfrac{1}{6}\times\ (-0.02715)=-0.004525$ となる．
ゆえに，$y(1.1)=1.99548$ が得られる．$y(1.2)$ も同様にすればよい．

9.2 (2)

A の固有方程式は，$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$ で，これを満たす λ が固有値．

３行を１行に加える．その後の行列式で，１列を－１倍して３列に加える．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

第１行で展開して，$-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \quad -\lambda\{-\lambda(2-\lambda)-8\}=0$

$$\therefore \quad \lambda(\lambda^2-2\lambda-8)=0 \quad \therefore \quad \lambda(\lambda-4)(\lambda+2)=0 \quad \therefore \quad \lambda=0,\ \ 4,\ \ -2$$

よって，固有値は $0,\, 4,\, -2$ である．

次に，固有ベクトルを求める．それには，λ が定まったとき、連立方程式

$\begin{cases} (1-\lambda)x+2y-z=0 \\ 2x-\lambda y-2z=0 \\ -x-2y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ を満たす x, y, z を求めればよい．

$\lambda=0$ のとき，$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-2z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ より x, y, z を求める．

$x=z,\, y=0$ となるから，t を任意の数として，$z=t$ とおくと，
$x=t$ となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad (t:\text{任意}) \text{ が得られる．}$$

$\lambda=4, -2$ の場合も同様にして，次のように定まる．

$$\boldsymbol{x}_2=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

9.4 (2)

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおく．A が直交行列であることを示すには，${}^tAA=E$ が

成り立つことを示せばよい．$s=\sin\theta,\, c=\cos\theta$ だから，$s^2+c^2=1$ に留意すれば，

$$
{}^{t}AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+s^2 & -cs+sc & 0 \\ 0 & -sc+cs & s^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E
$$

ゆえに，A は直交行列である．

9.5
(例題 9.1，9.3 参照)

現在の N 党と M 党の獲得票数をそれぞれ n 票, m 票 とする．題意より，次の選挙での獲得票数は，N 党は $0.7n + 0.1m$ 票，M 党は $0.3n + 0.9m$ 票である．

初めの N，M 党の得票数を $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ で表すと，次の選挙での得票数 $\boldsymbol{x}_1$ は，

$$
\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.7n + 0.1m \\ 0.3n + 0.9m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}
$$

で表される．いま，$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$ とおくと，現在と次回との得票数の関係は，

行列の積を用いて，$\boldsymbol{x}_1 = A \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}_0$ で表されることがわかる．

したがって，k 回後の得票数 $\boldsymbol{x}_k$ は，$\boldsymbol{x}_k = A^k \boldsymbol{x}_0$ となる．ゆえに，$\boldsymbol{x}_k$ の成分を知るには，A^k の成分がわかればよい．A^k の計算は行列の対角化を利用すれば簡単に求められる．

そこでまず，A の固有値を求める．固有方程式は，$\begin{vmatrix} 0.7-\lambda & 0.1 \\ 0.3 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = 0$．これより，

$$
(0.7-\lambda)(0.9-\lambda) - 0.03 = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6 = 0 \quad \therefore \quad (\lambda-1)(\lambda-0.6) = 0.
$$

固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.6$．固有ベクトルは，

$\lambda_1 = 1$ のとき，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，　$\lambda_2 = 0.6$ のとき，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

ゆえに，A の対角化への変換の行列を P とすれば，

$$
P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
$$

したがって，$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$ とおけば，$A = PQP^{-1}$ と書ける．なぜなら，

$$
AP = A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2] = [\lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \lambda_2 \boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = PQ
$$

$$
\therefore \quad AP = PQ, \qquad \therefore \quad A = PQP^{-1}
$$

$$A^2 = (PQP^{-1})(PQP^{-1})$$
$$= PQ(P^{-1}P)QP^{-1} = PQEQP^{-1} = PQ^2P^{-1}, \qquad (E\text{ は単位行列})$$
$$A^3 = AA^2 = (PQP^{-1})(PQ^2P^{-1}) = PQ(P^{-1}P)Q^2P^{-1} = PQ^3P^{-1}$$

同様にして，一般に，$A^k = PQ^kP^{-1}$ が成立する．ゆえに，

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}^k \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.6)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

したがって，$k \to \infty$ のとき，

$$A^k \to \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

以上により，選挙が何回も繰り返されると，N 党と M 党との獲得票数 $A^k\boldsymbol{x}_0$ は，

$$A^k\boldsymbol{x}_0 \to \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} n+m \\ 3n+3m \end{bmatrix} \quad (k \to \infty)$$

したがって，N 党 : M 党=第 1 成分 : 第 2 成分=1 : 3 に近づいていく．