問題の解答

一部の問題について，計算過程や解説をまとめる．

第 1 章

練習問題

1.1　A，B，C が取り出したカードを順番を考慮せず $\alpha < \beta < \gamma$ とする．この中で A，B，C が γ を引く確率は等しいので，3 者とも 1/3 である．

1.6　$(k/6)^n - ((k-1)/6)^n$．最初に $X_n \leq k$ となる確率を求めるとよい．

1.8　n 組の場合の完全順列の個数を a_n とすると，漸化式 $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$，　$(n \geq 2)$ が成り立つ．$a_1 = 0$，$a_2 = 1$ である．変形すると，$a_{n+1} - (n+1)a_n = -(a_n - na_{n-1})$ となるので，$a_n - na_{n-1} = (-1)^n$ が成り立つ．これから $\dfrac{a_n}{n!} - \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ が得られるので，確率 $= \dfrac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$．

1.9　$0.3 \times (1 - 0.7^n)/(1 - 0.7) > 0.9$ より $n > 6.456$．故に 7 回以上．

1.11　$f = {}_n\mathrm{C}_m \left(\dfrac{3}{5}\right)^m \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-m}$ とおく．$m = n/2$ のとき $f \approx \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^n \approx 0.9798^n$．

1.12　$A - B = C$ とおくと B と C は排反事象．$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ で $P(C) \geq 0$ より証明される．

1.13　対偶を取って計算する．

1.15　$n_k \ll g_k$ とすると G の表式が得られる．$\log G$ を計算し変分を取ると，$n_k = \exp\left[-\dfrac{\epsilon_k - \mu}{k_B T}\right]$ となる．

1.19　C_3 を 2 つの黒球のある事象とすると $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = 1/3$．ベイズの公式 (1.9)，(1.10) で事象を一つ追加した公式

$$P(C_i \,|\, D) = \frac{P(C_i)P(D \,|\, C_i)}{P(C_1)P(D \,|\, C_1) + P(C_2)P(D \,|\, C_2) + P(C_3)P(D \,|\, C_3)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

で計算することになるが，$P(D|C_3) = 0$ なので $P(C_3|D) = 0$ となる．さらに，$P(C_1|D)$，$P(C_2|D)$ も同じ値となる．

第 2 章

問

2.1 $E[(\lambda X+Y)^2] \geq 0$ を λ のべきに展開し，判別式 ≥ 0 より $(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$ が求まる．上の式で X に $X-\overline{X}$，Y に $Y-\overline{Y}$ を代入すると $|C[X,Y]| \leq \sigma_X\sigma_Y$ が得られる．

2.2 $\rho[X,Y] \propto C[X,Y] = E[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] = E[X-\overline{X}]E[Y-\overline{Y}] = 0$.

2.3 期待値の線形性によって $V[Z] = E[(aX+bY-a\overline{X}-b\overline{Y})^2] = E[a^2(X-\overline{X})^2] + E[b^2(Y-\overline{Y})^2] + E[2ab(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})]$.

2.4 $|S| \leq \sqrt{K}$ は $|\mu_3| \leq \sigma\sqrt{\mu_4}$ と同値．これは $|E[(X-\overline{X})^3]|^2 \leq E[(X-\overline{X})^2]E[(X-\overline{X})^4]$ と同値であることより証明される．

練習問題

2.1 $P(A\cap B^C) = P(A\cap(\Omega - B)) = P(A) - P(A\cap B)$ より証明される．

2.2 θ を針の中心から直線へ下ろした垂線と針とのなす角度とし，x をこの垂線の長さとする．すると $\theta = \cos^{-1} 4x$. θ と x が一様に分布すると考えると 確率 $= \displaystyle\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2}{\pi}\cos^{-1} 4x\, dx = \frac{1}{\pi}$ となる．

2.3 間隔 $2r$ で平行線を引き詰めた平面に，半径 r の円を投げたときの確率は，円に無作為に弦を引き，その弦と円の中心 O との距離を x としたとき，x の分布が一様であることに対応する．従って確率は x が $r/2$ より大きい場合で $1/2$ となる．半径 r の円に長い針を無作為に投げたときの確率は，円に無作為に弦を引き，その中点 M が円内に一様に分布することに対応する．従って確率は点 M が半径 r の円と中心を共有する半径 $r/2$ の円内にある場合で $1/4$ である．

2.4 適当な a, b を取り，X_1, X_2 に対して $P(\{X_1+X_2 \leq a\}\cap\{X_1-X_2 \leq b\}) \neq P(\{X_1+X_2 \leq a\})P(\{X_1-X_2 \leq b\})$ となることを示せ．

2.5 $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u\, dF(u) = \int_{-\infty}^{a} u\, dF + \int_{a}^{\infty} u\, dF = \int_{-\infty}^{a} \{d(uF) - F\, du\} - \int_{a}^{\infty} u\, d(1-F)$ より示される．

2.6 $E[X^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dF = \int_{0}^{\infty} u^2\, dF = -\int_{0}^{\infty} u^2\, d(1-F)$ より示される．

2.13 式 (2.41) の両辺を b で微分せよ．

2.14 $\rho[X,Y] = \pm 1$ のとき，$X' = X-\overline{X}$，$Y' = Y-\overline{Y}$ とすると，$E[(\lambda X'+Y')^2] = 0$ が，重根 $\lambda_d = -E[X'Y']/E[X'^2]$ によって実現される．このとき $\lambda_d X' + Y' = 0$ となり，$Y = -\lambda_d(X-\overline{X}) + \overline{Y}$ が得られる．

第 3 章

問

3.1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ を利用せよ．

3.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2}\, dt = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ を利用せよ．

3.3 $\phi(k) = e^{C_1(ik) - C_2 k^2/2}$．$C_2 = 0$ の場合，$\phi(k) = e^{C_1(ik)}$ で，平均が C_1 の単位分布となるので正しくない．

3.4 $C_{m_1 m_2 \cdots m_l} = \dfrac{\partial}{\partial(ik_1)^{m_1}} \dfrac{\partial}{\partial(ik_2)^{m_2}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial(ik_l)^{m_l}} \left(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\mu} - \dfrac{1}{2}\ {}^t\boldsymbol{k} A^{-1} \boldsymbol{k} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}$．これから明らかに $|m_1| + |m_2| + \cdots |m_l| \geq 3$ なら $C_{m_1 m_2 \cdots m_l} = 0$.

3.5 $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sigma_2^2 |A| \sigma_1^2 |A| - \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 |A|^2$．これから $|A|^{-1} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$ となることより得られる．

3.6 $E[(X-Y)^4] = E[X^4] + 6E[X^2]E[Y^2] + E[Y^4]$ を利用する．

3.8 $\phi(k) = \dfrac{\lambda}{\pi} e^{ik\mu} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ikt}}{t^2 + \lambda^2}\, dt$．$k > 0$ なら複素平面の上半面を回る積分路，$k <$ なら複素平面の下半面を回る積分路を取ることによって式 (3.18) が得られる．

3.9 $E[e^{tX}] = \dfrac{\lambda}{\pi} e^{t\mu} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ty}}{y^2 + \lambda^2}\, dy$．これから明らかに $t \neq 0$ なら積分が収束しないことがわかる．

3.10

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left[-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2} + x \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_X^2} \left\{ x - (\mu_X + \sigma_X^2) \right\}^2 + \left(\mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2} \right) \right]$$

より得られる．

3.11 $X_1 = (Y_1 + Y_2)/2$，$X_2 = (Y_1 - Y_2)$ より，$g(y_1, y_2) = \dfrac{1}{2} f\left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{y_1 - y_2}{2} \right)$．$f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\dfrac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$ へ，$y_1 = x_1 + x_2$，$y_2 = x_1 - x_2$ を代入すると $g(y_1, y_2)$ が y_1 の関数と y_2 の関数の積になる．

練習問題

3.2 $\phi(k)$ が $k = 0$ で解析的でないことから明らか．

3.7 $y = x^\alpha$ とおく．Y の確率密度関数を $g(y)$ とすると，$g(y)dy = f(x)dx$ より $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$.

3.8 $E[e^X] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left[-\dfrac{(x - \sigma^2) - \sigma^4}{2\sigma^2} \right] = \exp\left[\dfrac{1}{2}\sigma^2 \right]$.

3.9 適当な直交行列 T により

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \Large 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \cdots & \\ \Large 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となることから明らか．

3.10 明らか．

3.16 $P(X = k) \approx e^{-\lambda t} \lambda \Delta t$．$\Delta P(X \geq t) = -P(X = k)$ を解くと得られる．

3.17 長さが x_{S+1} である区間の両端の点を S と $S+1$ とする $(0 \le S \le n-1)$．点 S まで位置が確定したとし，非常に小さい長さの区間 dx を右方向へ無数に延長する．$\lambda = (n-1)/l$ とすると，点 $S+1$ が無限小区間 dx へ入る確率は $p = \lambda dx$ となる．点 $S+1$ が $m+1$ 番目の小区間に入ったとする．$mp = m\lambda dx \approx x_{S+1}\lambda$，$q = 1-p \approx 1 - \lambda x_{S+1}/m$ であるから，点 $S+1$ が $m+1$ 番目の小区間に入る確率は

$$q^m p = \left(1 - \lambda \frac{x_{S+1}}{m}\right)^m \lambda dx \approx \lambda e^{-\lambda x_{S+1}} dx$$

となる．

3.18 $B \subset A$ のとき，$P(B|A) = P(B)/P(A)$ なので

$$P(T > t+s | T > t) = \frac{P(T > t+s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s)$$

3.19 f の特性関数が $\phi(k) = \dfrac{\lambda}{\lambda - ik}$ となることから $f * f * \cdots * f$ の特性関数は $\{\phi(k)\}^n = \dfrac{\lambda^n}{(\lambda - ik)^n}$ なる．公式 (2.72) より $f * f * \cdots f = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi(k)\}^n e^{-ikx}\, dk = \dfrac{\lambda^n}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-ikx}}{(\lambda - ik)^n}\, dk$. 複素積分の公式を用いると $f * f * \cdots * f = \lambda^n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$ が得られる．

3.20 $X_1 + X_2$ の特性関数は $\phi(k) = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - ik)(\lambda_2 - ik)}$ で，公式 (2.72) より確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - ik)(\lambda_2 - ik)} e^{-ikx}\, dx = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})$.

3.22 Z の分布関数を $F_Z(z)$ とすると

$$F_Z(z) = P(\{Z \le z\}) = P\left(\left\{\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \le z\right\}\right) = \int_0^{\infty} P\left(\left\{X \le \sqrt{\frac{y}{n}} z\right\}\right) P\left(\{y < Y \le y + dy\}\right)$$

となり，これから $f_Z(z) = F_Z'(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{y}{n}} f_X\left(\sqrt{\frac{y}{n}} z\right) f_Y(y)\, dy, \quad f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $f_Y = \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}$ となる．

第 4 章

問

4.1 X_n が X に確率収束しないのに，$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad$ (a.e.) となったとする．すると $^{\exists}\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，n をいくら大きくしても $P(\{|X_n - X| > \epsilon\}) > \delta$ となる．これは $|X_n - X| > \epsilon$ となる ω の測度がゼロでないことを意味しているので，$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad$ (a.e.)，つまり $\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0 \quad$ (a.e.) と矛盾する．

練習問題

4.1 S_n, X_i $(1 \leq i \leq n)$ を例 2 と同じ確率変数とする．$Q_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - p\sqrt{n}$ の特性関数を $\phi_n(k)$ とすると $\phi_n(k) = (pe^{ik/\sqrt{n}} + q)^n \exp(-ikp\sqrt{n})$ となり，$n \to \infty$ で $\log\phi_n(k) \to -\dfrac{1}{2}pk^2$ すなわち $\lim_{n\to\infty}\phi_n(k) = e^{-pk^2/2}$.

4.2 $Q_n = S_n/n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ の特性関数を $\phi_n(k)$ とすると

$$\phi_n(k) = \left(e^{-|k|\lambda/n + ik\mu/n}\right)^n = e^{-|k|\lambda + ik\mu}$$

4.3 $Q_n = S_n/\sqrt{n} - \sqrt{n}\mu$ の特性関数を $\phi_n(k)$ とすると

$$\phi_n(k) = \left(e^{-|k|\lambda/\sqrt{n} + ik\mu/\sqrt{n}}\right)^n \times \exp(-ik\mu\sqrt{n}) = e^{-|k|\sqrt{n}\lambda}$$

となり $\lim_{n\to\infty}\phi_n(k) = 0$ である．

4.4 例 3.5 より，S_n はパラメータが n (平均が n) のポアソン分布に従うので，$S_n = k$ となる確率 $P_k = \dfrac{n^k}{k!}e^{-n}$ となる．一方，中心極限定理によって $(S_n - n)/\sqrt{n}$ は $n \to \infty$ のとき，$N(0,1)$ へ近づくことから表式が得られる．

4.5 $S_p(\ell) \propto \epsilon^\alpha \ell^\beta$ とおく．次に速度を u とすると，$S_p(\ell)$ の次元が u^p と同じであることを用いる．

4.6 練習問題 3.3 より y が対数正規分布に従うとき $(E[y])^n = \exp\left[\dfrac{1}{2}\sigma_X^2 n + \mu_X n\right]$, $E[y^n] = \exp\left[\dfrac{1}{2}\sigma_X^2 n^2 + \mu_X n\right]$．これから $E[y^n] = (E[y])^n \exp\left[\dfrac{1}{2}\sigma_X^2 n^2 - \dfrac{1}{2}\sigma_X^2 n\right]$ で，これは n が任意の実数 q のときも成立する．$y \to \epsilon$，$\sigma_X \to \sigma$ とすると結果が得られる．

第 5 章

問

5.1 ${}_{2n}\mathrm{C}_n = \dfrac{2n(2n-1)}{n^2}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ を利用する．

5.3 $p_{00}(2n)$ は n 回右へ，n 回左へ進む確率．

5.4 $p_{\mathbf{00}}(2n+1) = 0$ は明らか．$p_{\mathbf{00}}(2n)$ は右へ l 回，左へ l 回，上へ m 回，下へ m 回で $l + m = n$.

練習問題

5.4 特別解が $R_g = A + B(q/p)^g$ となり，境界条件を当てはめると $R_g = \dfrac{(q/p)^b - (q/p)^g}{(q/p)^b - 1}$ が得られる．

5.8 $X_n = i$ のとき状態 i にあるとすると，マルコフ連鎖になることは明か．$p_{ij} = \dfrac{1}{3}$ $(j = i+2)$, $\dfrac{1}{2}$ $(j = i-1)$, $\dfrac{1}{6}$ $(j = i)$, 0 (その他).

5.9 $Z_{n+1}=Z_{n+1}-1\ (3,6),\quad Z_n=Z_n+1\ (1,2,4,5)$．$Z_n=i$ のとき状態 i と呼ぶことにすると，$p_{i,i-1}=\dfrac{1}{3},\quad p_{i,i+1}=\dfrac{2}{3},\quad p_{ij}=0$ (それ以外) となる．

5.10 $Z_{n+1}=|Y_n-X_n-1|\ \ (1,3,5),\quad Z_{n+1}=|Y_n-X_n+1|\ \ (2,4,6)$．$Z_{n+1}$ は $Z_n=|Y_n-X_n|$ だけでは決まらないのでマルコフ連鎖にならない．

5.14 明らかに $P_{\mathbf{00}}(2n+1)=0$．$2n$ 回目に原点に復帰するのは，$2n=2l+2m$ として，左右にそれぞれ l ステップ，上下に m ステップ動く場合である．従って $P_{\mathbf{00}}(2n)=\displaystyle\sum_{l+m=n}\frac{(2n)!}{l!\,l!\,(n-l)!(n-l)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\left({}_{2n}\mathrm{C}_n\right)^2$．スターリングの公式により $P_{\mathbf{00}}(2n)\approx\dfrac{1}{n\pi}$．これから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}P_{\mathbf{00}}(n)=\infty$．

5.15 スターリングの公式を用いると ${}_{2n}\mathrm{C}_n\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{(2n)^{2n+1/2}}{n^{2n+1}}$ となるから $u_{2n}\approx\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$．$p_{2k,2n}$ も同様にして得られる．

5.16 練習問題 5.14 より，$p_{2k,2n}\approx\dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$．$x=k/n$ とおくと

$$\text{確率}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}n\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\alpha}$$

第 6 章

問

6.1 確率連続の式より $\displaystyle\lim_{t\to t_0}P(\{|X(t)-X(t_0)|<\epsilon\})=1$．$X(t)$ は確率変数でないので上の条件は任意の $\epsilon>0$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to t_0}|X(t)-X(t_0)|<\epsilon$ に帰着する．

6.2 条件を繰り返し用いると，整数 n に対して $f(n\Delta t)=nf(\Delta t)$．同様にして非ゼロの整数 m に対して $f\left(\dfrac{1}{m}\Delta t\right)=\dfrac{1}{m}f(\Delta t)$．これらを組み合わせると $f\left(\dfrac{n}{m}\Delta t\right)=\dfrac{n}{m}f(\Delta t)$ となるので，任意の有理数 r に対して $f\,(r\Delta t)=rf(\Delta t)$ が成立する．$f(t)$ は連続関数なので，すべての数 α に対して $f\,(\alpha\Delta t)=\alpha f(\Delta t)$．$\Delta t=1$ と取ると $f\,(\alpha)=\alpha f(1)$．

練習問題

6.1 $W(t_{k-1})^3(W(t_k)-W(t_{k-1}))=\dfrac{1}{4}(W(t_k)^4-W(t_{k-1})^4)-\dfrac{1}{4}W(t_k)^2(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2$ $-\dfrac{3}{4}W(t_{k-1})^2(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2-\dfrac{1}{2}W(t_{k-1})W(t_k)(W(t_k)-W(t_{k-1}))^2$ を利用する．

6.2 $W(s)-W(t)$ は正規分布 $N(0,s-t)$ に従うので，$\sqrt{c}(W(s)-W(t))$ は $N(0,c(s-t))$ に，$(W(cs)-W(ct))$ は $N(0,c(s-t))$ に従う．

6.3 $W(t)-W(0)$ が正規分布 $N(0,t)$ に従うことから明らか．

6.10 $P(\{X(s)=k\})=e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^k}{k!}$ より $P(\{X(t)-X(t_0)=0\})=e^{-\lambda(t-t_0)}$．

これは $P(\{T_1 = t_1 - t_0 > t - t_0\}) = e^{-\lambda(t-t_0)}$ を意味する．従って T_1 の分布関数を $F(x)$ とすると $F(x) = 1 - P(\{T_1 > x\}) = P(\{T_1 \leq x\}) = 1 - e^{-\lambda x}$．故に指数分布となる．$T_1, T_2, \cdots T_n$ が独立で同じ指数分布となることは明らか．

第 7 章

問

7.3

a. $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d_z F(x, t - \Delta t; z, t)$ より $F(x, t; y, s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x, t; y, s) d_z F(x, t - \Delta t; z, t)$ $\cdots$(k.1)

b. $F(x, t - \Delta t; y, s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(z, u; y, s) d_z F(x, t - \Delta t; z, u)$ $(t - \Delta t < u < s)$ $\cdots$(k.2)
式 (k.2) で $u = t$ とおいて ((k.2) − (k.1))/Δt とすると得られる．

c. $\dfrac{1}{\Delta t}[F(x, t - \Delta t; y, s) - F(x, t; y, s)] = \dfrac{1}{\Delta t}\left(\displaystyle\int_{|z-x| \geq \delta} + \int_{|z-x| < \delta}\right)[F(z, t; y, s)$ $-F(x, t; y, s)]\, d_z F(x, t - \Delta t; z, t)$.

d. $F(z, t; y, s) - F(x, t; y, s) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(z - x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z - x)^2$

e. $\dfrac{1}{\Delta t}[F(x, t - \Delta t; y, s) - F(x, t; y, s)] = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{|z-x| < \delta}(z - x)\dfrac{\partial F}{\partial x} d_z F(x, t - \Delta t; z, t)$ $+\dfrac{1}{2\Delta t}\displaystyle\int_{|z-x| < \delta}(z - x)^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} d_z F(x, t - \Delta t; z, t)$．故に $\dfrac{\partial F}{\partial t} = -a(x, t)\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{1}{2}b(x, t)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

練習問題

7.1　$C[X(t), X(s)] = \cos\omega(t - s)$．定理 7.2 より $X(t)$ は弱定常過程.

7.2　$E[X(t)] = 0$．$C[X(t), X(s)] = E[X(t)X(s)] = E[\cos^2 C]\cos\omega(t - s)$.

7.4　ラプラス変換 $U(x, s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}u(x, t)\, dt$ から式 (7.56) が得られる．式 (7.57) は式 (7.55) の両辺を $-\infty$ から ∞ へ積分する．

7.5　方程式 (7.56) を解くと $U(x, s) = Ae^{-\sqrt{2s}|x|}$．$u(x, 0) = \delta(x)$ を仮定すると，$A = 1/\sqrt{2s}$．ラプラス逆変換の積分 $u(x, t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{st}\dfrac{1}{\sqrt{2s}}e^{-\sqrt{2s}|x|}\, dx$ を s 面の実数軸の $s \leq 0$ に切断を入れて $\mathrm{Arg}s = -\pi$ に沿って $-\infty$ から 0 まで，$\mathrm{Arg}s = \pi$ に沿って 0 から ∞ まで積分すると，解

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

が得られる．

7.6 $X(t)$ がガウス過程なら，特性汎関数 $\phi(k(t))$ は式 (7.1) となる．$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{k}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$ とする．$\check{k}(\omega) = 2\pi\widehat{k}(-\omega)$ とおくと $\int_{-\infty}^{\infty} X(t)k(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(\omega)\check{k}(\omega)\, d\omega$ となる．これから $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, dt\, E[X(t)X(s)]k(t)k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, d\omega' E[\widehat{X}(\omega)\widehat{X}(\omega')]$．同様にして $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, dt\, k(t)C[X(t), X(s)]k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, d\omega' \check{k}(\omega)C[\widehat{X}(\omega), \widehat{X}(\omega')]\check{k}(\omega')$.

故に $\psi(\check{k}(\omega)) = E\left[\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(\omega)\check{k}(\omega) d\omega\right)\right]$

$= \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} E[\widehat{X}(\omega)]\check{k}(\omega) d\omega - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \check{k}(\omega)C[\widehat{X}(\omega), \widehat{X}(\omega')]\check{k}(\omega')\, d\omega\, d\omega'\right\}$.

第 8 章

問

8.1 $\int_0^1 f_x(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = 1$ で，$f_x(x) \geq 0$ より条件を満たしている．なお $x = \sin^2\theta$ と変数変換すればよい．

練習問題

8.1 定理 8.5 の式 (8.13) へ $f(x,t)$ を代入すると，f がコルモゴロフ・フェラーの後ろ向き方程式を満足することから $df = f_x(x,t)b(t)dW(t)$ となる．伊藤積分をすると $\int_{t\ I}^{T} df = f(X(T),T) - f(X(t),t) = \int_{t\ I}^{T} b(t)f_x(x(t),t)\, dW(t)$ が得られる．両辺の期待値を取ると，伊藤積分の期待値はゼロなので $f(x,t) = E[f(X(T),T)]$ $= E[\psi(X(T))|X(t) = x]$ が得られる．

8.5 $f(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{i,j=1}^{4} k_i H_{ij} k_j$ とするとき

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial k_1 \partial k_2 \partial k_3 \partial k_4} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} &= \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_2} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} \frac{\partial^2}{\partial k_3 \partial k_4} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_3} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} \frac{\partial^2}{\partial k_2 \partial k_4} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} + \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_4} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0} \frac{\partial^2}{\partial k_2 \partial k_3} e^f\Big|_{\boldsymbol{k}=0}
\end{aligned}
$$

となることから，$E[\widehat{u}(k)\widehat{u}(l)\widehat{u}(m)\widehat{u}(n)] = E[\widehat{u}(k)\widehat{u}(l)]E[\widehat{u}(m)\widehat{u}(n)] + E[\widehat{u}(k)\widehat{u}(m)]E[\widehat{u}(l)\widehat{u}(n)]$ $+E[\widehat{u}(k)\widehat{u}(n)]E[\widehat{u}(l)\widehat{u}(m)]$.

8.7 (a) 定常解 $\overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0$ に対しては，$\mu < 1$ のとき，3 実根ですべて負なので定常解は安定．$\mu \geq 1$ のとき，2 実根は負，1 実根が正 (ゼロ $(\mu = 1)$) なので定常解は対流型不安定．

(b) 定常解 $\overline{X} = \overline{Y} = \pm\sqrt{b(\mu-1)}$, $\overline{Z} = \mu - 1$ に対しては，$\mu > 1$ のとき，1 実根は負，2 根が複素共役である．$\mu_T = Pr(Pr + b + 3)/(Pr - b - 1)$ とおくと，$\mu < \mu_T$ のときは複素根の実部は負なので安定，$\mu \geq \mu_T$ のときは複素根の実部は正 (ゼロ ($\mu = \mu_T$)) なので振動型不安定．

8.8 $v(t) = e^{-\alpha'(t-t_0)}v(t_0) - \dfrac{g}{\alpha'}\left(1 - e^{-\alpha'(t-t_0)}\right) + \beta' I \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha'(t-\tau)}\, dW(\tau)$.

$t \to \infty$ では $v(t) \approx -\dfrac{g}{\alpha'} + +\beta' I \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha'(t-\tau)}\, dW(\tau)$.

8.9 下記のプログラム例により，$n = 100$ で 50000 回の施行を繰り返すことにより，0.36588 (真の値は 0.3679) が得られる．

```
program napier
  integer :: i,j,k,itemp,isum
  integer :: n=100,nnn=50000,ix(100)
  real(8) :: x(0:100),y(0:100),temp,xr,probab,pi,aa
  pi=4.d0 * datan(1.d0)
  isum=0
  y(0)=0.3d0
  do k=1,nnn
    do i=1,n
      y(i) = 4.d0 * y(i-1) * (1.d0-y(i-1))
      aa = dsqrt(y(i))
      x(i) = 2.d0 * asin(aa)/pi
    enddo
    do i=1,n
      ix(i) = i
    enddo
    do i = 1,n-1
      do j=i+1,n
        if(x(i) > x(j)) then
          temp = x(i)
          itemp = ix(i)
          x(i) = x(j)
          ix(i) = ix(j)
          x(j) = temp
          ix(j) = itemp
        endif
      enddo
    enddo
    do i=1,n
      if(ix(i) == i) then
        isum = isum + 1
        go to 10
      endif
    enddo
```

```
   10 continue
      y(0) = y(n)
   enddo
   probab = dble(nnn-isum)/dble(nnn)
   write(6,100) probab
100 format(2x,' probab = ',f12.5)
end program napier
```