補遺

本書中で説明しきれなかった内容，あるいは付録として，分けて説明した方がいいようないくつかのテーマをオンライン補遺としてまとめた．

目 次

A. 1　スターリングの公式の導出

スターリングの公式

$$s! = \sqrt{2\pi} s^{s+1/2} e^{-s} \tag{A.1}$$

を導く．まずガンマ関数 $\varGamma(s)$ を

$$\varGamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \tag{A.2}$$

と定義すると

$$\varGamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} x^s \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{-1} s x^{s-1} dx = s\varGamma(s)$$

となり，公式

$$\varGamma(s+1) = s\varGamma(s) \tag{A.3}$$

が得られる．式 (A.3) を繰り返し用いると

$$\varGamma(s+1) = s(s-1)(s-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \varGamma(1)$$

となり

$$\varGamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

であるから，s が正整数のとき，公式

$$\varGamma(s+1) = s! \tag{A.4}$$

が成り立つ．次に

$$\varGamma(s+1) = \int_0^\infty e^{s \log x - x} dx$$

と変形し，$x = s(1+u)$ とおくと

$$\varGamma(s+1) = \int_{-1}^\infty e^{s \log s(1+u) - s(1+u)} s du = s e^{s(\log s - 1)} \int_{-1}^\infty e^{s[\log(1+u) - u]} du$$

となる．$s \to \infty$ の極限では，最後の定積分で，指数関数の指数部で $\log(1+u) - u$ が極大値を取る $u = 0$ 周辺のみが積分に寄与するため

$$\log(1+u) - u = u - \frac{u^2}{2} - u + \cdots \approx -\frac{u^2}{2}$$

と近似される．従って

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}(s+1) &\approx se^{s(\log -1)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-su^2/2}du = se^{s(\log -1)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\sqrt{\frac{2}{s}}dz \\
&= \sqrt{s}\sqrt{2\pi}e^{s(\log -1)}
\end{aligned}
$$

となり，スターリングの公式が得られる．

A. 2　ルベーグ・スティルチェス積分を用いた計算方法

ルベーグ・スティルチェス積分について，具体的な計算方法を，1 次元に限って簡単に説明しよう．$g(x)$ を積分可能な関数とする．関数 $F(x)$ が微分可能なら，$g(x)$ の $F(x)$ によるルベーグ・スティルチェス積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, F'(x)\, dx \tag{A.5}$$

となる．$F(x)$ が連続で，有限個の点を除いて微分可能である場合は，式 (A.5) の右辺は，$F(x)$ が微分できない点を除いて適用される．$x = x_1$ で $F(x)$ が高さ F_1 の不連続を持ち

$$\lim_{\delta \to +0} \left(F(x_1 + \delta) - F(x_1 - \delta)\right) = F_1$$

それ以外の点では微分可能であるとすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{x_1} g(x)\, F'(x)\, dx + F_1 g(x_1) + \int_{x_1}^{\infty} g(x)\, F'(x)\, dx \tag{A.6}$$

となる．この様に，ルベーグ・スティルチェス積分を用いると，$F(x)$ が特異部を持ち，不連続点が存在する場合でも同じ形式で積分が定義できる．

A. 3　デルタ関数

超関数の中で，特にデルタ関数 $\delta(x)$ は，確率を議論する際にも頻繁に表れるので，必要最小限の知識を得るために，簡単な説明を行う．数学的にはシュワルツによる，分布 (distribution) に基づく定義，または佐藤幹夫による解析関数の境界値による定義があるが，実用的には以下のように考えると，最も使いやすい (詳しくは，参考文献 [15] 参照)．

まず，**1 関数列** $\{1_n(\omega)\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を定義する．$1_n(\omega)$ は非負の偶関数列で，任意の有限区間 $-L \leq \omega \leq L$ $(L > 0)$ において

$$\lim_{n\to\infty} 1_n(\omega) = 1 \tag{A.7}$$

を満足し，有限個の不連続点以外では微分可能で，フーリエ変換可能であるとする．さらに，任意の n に対して

$$1_n(0) = 1 \tag{A.8}$$

で，任意の有限区間 $-L \leq \omega \leq L$ の微分可能な点では

$$\lim_{n\to\infty} 1'_n(\omega) = 0 \tag{A.9}$$

となるとする．また，$1_n(\omega)$ のすべての不連続点 ω_0 は

$$\lim_{n\to\infty} |\omega_0| = \infty \tag{A.10}$$

であるとする．このとき**デルタ関数列** $\{\delta_n(x)\}$ を

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1_n(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega \tag{A.11}$$

で定義する．するとフーリエ変換の性質より

$$1_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)e^{-i\omega x}\, dx \tag{A.12}$$

となる．極限関数 $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$ は，積分 (A.11) が普通の意味では収束しないため，通常の関数としての意味はなくなるが，これを**ディラックのデルタ関数** $\delta(x)$ と呼び，以下のように定義する．

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, d\omega \tag{A.13}$$

$\delta(x)$ のすべての性質は，$\delta_n(x)$ のフーリエ変換 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}1_n(\omega)$ と，$n \to \infty$ の極限で与えられるものとする．

例えば，$f(x)$ を，フーリエ変換可能な通常の関数とし，そのフーリエ変換を $\widehat{f}(\omega)$ とする．フーリエ変換の性質より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x-a)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)1_n(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = f(a) \qquad \text{(A.14)}\end{aligned}$$

が得られる．

極限のデルタ関数 $\delta(x)$ は，関数列 $1_n(x)$ の選び方によらず，超関数として一意的に定まるが，デルタ関数を用いた公式を求めるためには，それぞれの場合に対して，適当な関数列 $1_n(\omega)$ を選ぶことにより，証明が容易となる．以下のような関数列の例が考えられる．

$$1_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (-n \le \omega \le n) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} \qquad \text{(A.15a)}$$

$$1_n(\omega) = e^{-|\omega|/n} \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \qquad \text{(A.15b)}$$

$$1_n(\omega) = e^{-\omega^2/n} \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-nx^2/4} \qquad \text{(A.15c)}$$

$$1_n(\omega) = \frac{\pi\omega}{2n\sinh(\pi\omega/(2n))} \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x) = \frac{n}{2}\mathrm{sech}^2 nx \qquad \text{(A.15d)}$$

最後に，単位階段関数 $\theta(x)$ はデルタ関数列の積分

$$\theta_n(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta_n(x)\,dx \qquad \text{(A.16)}$$

で与えられる関数列 $\theta_n(x)$ の，$n\to\infty$ の極限

$$\theta(x) = \lim_{n\to\infty}\theta_n(x) \qquad \text{(A.17)}$$

として定義される関数と同一で，超関数として，あるいは本書では，$n\to\infty$ の極限として

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x) \qquad \text{(A.18)}$$

である．例えば，式 (A.15d) で与えられる関数列なら，

$$\theta_n(x) = \frac{1}{2}(\tanh nx + 1) \qquad \text{(A.19)}$$

となる．

A. 4　ガウス型分布関数の積分

ガウス型分布関数の積分公式

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{A.20}$$

を証明する．2 重積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

を極座標 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ によって変数変換すると

$$I = \int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr$$

となる．これから

$$I = -\pi \left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

となり，式 (A.20) が得られる．

A. 5　Fortan によるコイン投げの計算プログラム

Fortan によるコイン投げの計算プログラムを示す．

```
program bernoutrial
implicit none
integer :: i, fi = 10
integer :: ix(0:100000), isum
real(8) :: xr
open(fi, file='btrialdata.dat')
isum = 0
ix(0) = 0
i=0
write(fi,100) i,ix(0)
do i=1,100000
  call random_number(xr)
  if(xr <= 1.d0/2.d0) then
    ix(i)=1
  else
    ix(i)=-1
  endif
  isum = isum + ix(i)
  write(fi,100) i, isum
enddo
100 format(2x,i5,' isum = ',i5)
end program bernoutrial
```

本書の計算は，GNU Fortran version 4.5.0 で行った．

A. 6　ロジスティック写像の数列

ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \tag{A.21}$$

の，$a = 4$ に対する写像

$$y = 4x(1 - x) \tag{A.22}$$

については，様々な解析が可能で，詳しい結果が得られていることは本書で述べた．ここでは，写像 (A.22) から得られる数列 x_n について，左上から右下方へ，$n = 1$ から 204 までを以下に表示する．

0.84000000	0.53760000	0.99434496	0.02249224	0.08794536	0.32084391
0.87161238	0.44761695	0.98902407	0.04342185	0.16614558	0.55416492
0.98826465	0.04639054	0.17695382	0.58256466	0.97273231	0.10609667
0.37936067	0.94178461	0.21930545	0.68484228	0.86333333	0.47195556
0.99685404	0.01254426	0.04954761	0.18837059	0.61154843	0.95022779
0.18917975	0.61356309	0.94841370	0.19570061	0.62960752	0.93280757
0.25071045	0.75141887	0.74715420	0.75565920	0.73855350	0.77236891
0.70326070	0.83474035	0.55179560	0.98926886	0.04246392	0.16264293
0.54476082	0.99198588	0.03179959	0.12315352	0.43194693	0.98147512
0.07272684	0.26975059	0.78794083	0.66836032	0.88661921	0.40210234
0.96166419	0.14746470	0.50287545	0.99996693	0.00013229	0.00052908
0.00211520	0.00844289	0.03348642	0.12946031	0.45080135	0.99031797
0.03835314	0.14752871	0.50305597	0.99996264	0.00014942	0.00059758
0.00238889	0.00953273	0.03776743	0.14536422	0.49693386	0.99996240
0.00015041	0.00060157	0.00240481	0.00959613	0.03801616	0.14628372
0.49953917	0.99999915	0.00000340	0.00001359	0.00005436	0.00021744
0.00086958	0.00347530	0.01385289	0.05464396	0.20663198	0.65574081
0.90297920	0.35043107	0.91051654	0.32590469	0.87876330	0.42615346
0.97818675	0.08534972	0.31226059	0.85901566	0.48443104	0.99903043
0.00387452	0.01543804	0.06079883	0.22840935	0.70495407	0.83197532
0.55916953	0.98599586	0.05523208	0.20872598	0.66063779	0.89678200
0.37025616	0.93266615	0.25120002	0.75239428	0.74518852	0.75953036
0.73057597	0.78733889	0.66974546	0.88474592	0.40788231	0.96605732
0.13116229	0.45583498	0.99219780	0.03096529	0.12002576	0.42247830
0.97596154	0.09384243	0.34014413	0.89778440	0.36707028	0.92931876
0.26274160	0.77483380	0.69786553	0.84339694	0.52831418	0.99679323
0.01278595	0.05048988	0.19176261	0.61995885	0.94243949	0.21698917
0.67961949	0.87094735	0.44959224	0.98983623	0.04024187	0.15448984
0.52249091	0.99797664	0.00807708	0.03204738	0.12408137	0.43474074
0.98296492	0.06697955	0.24997317	0.74994635	0.75010730	0.74978536
0.75042909	0.74914107	0.75171490	0.74655843	0.75683575	0.73614158
0.77694861	0.69319787	0.85069832	0.50804274	0.99974126	0.00103470
0.00413453	0.01646974	0.06479395	0.24238277	0.73453346	0.77997623
0.68645324	0.86094076	0.47888707	0.99821698	0.00711938	0.02827477

A. 7　円周率 π

円周率 π の小数点以下のみ 1000 桁を，以下に示す.

1-50 桁	1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
51-100 桁	5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
101-150 桁	8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
151-200 桁	4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
201-250 桁	4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
251-300 桁	4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
301-350 桁	7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
351-400 桁	7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
401-450 桁	3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
451-500 桁	0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
501-550 桁	9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
551-600 桁	6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
601-650 桁	0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
651-700 桁	1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
701-750 桁	4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
751-800 桁	5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
801-850 桁	5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
851-900 桁	7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
901-950 桁	5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
951-1000 桁	1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

本書の表 8.1 でみた通り，小数点以下 1000 桁の各数字の出現回数は，ほぼ均一になっているように見える.

表 8.1　π の小数点以下の数字 1000 桁までの $0, 1, \cdots, 9$ の出現回数

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出現回数	93	116	103	102	93	97	94	95	101	106