高専テキストシリーズ

線形代数

問題集

上野 健爾［監修］
高専の数学教材研究会［編］

森北出版株式会社

「線形代数問題集」

サンプルページ

この本の定価・判型などは，以下の URL からご覧いただけます．

http://www.morikita.co.jp/books/mid/005601

※このサンプルページの内容は，初版 1 刷発行時のものです．

まえがき

本書は，高専テキストシリーズの『線形代数』に準拠した問題集である．各節は，［**まとめ**］に続いて，問題を難易度別に配置した．詳しい構成は，下記のとおりである．

まとめ　いくつかの要項
原則的に，教科書『線形代数』にある枠で囲まれた定義や定理，公式に対応したものである．ここに書かれていることは，問題を解いていく上で必要不可欠であるので，しっかりと理解してほしい．

A 問題　教科書の問レベル
教科書の本文中の問に準拠してあり，問だけでは足りない分を補う役割を果たしている．これらの問題が解ければ，これ以後の学習に必要な内容が修得できるように配慮してある．

B 問題　教科書の練習問題および定期試験レベル
教科書で割愛された典型的な問題も，この中に例題として収録し，直後にその理解のための問題をおいている．また，問題を解く上で必要な［**まとめ**］の内容や関連する［**A**］の問題などを参照できるように，要項番号および問題番号を ☞ で示している．

C 問題　大学編入試験問題レベル
過去の入試問題を参考にして，何が問われているかを吟味した上で，それに特化した問題に作り替えたものである．基礎的な問題から応用問題まで，その難易度は幅広いが，ぜひチャレンジしてほしい．

解　答
全問に解答をつけた．とくに［**B**］，［**C**］問題の解答はできるだけ詳しく，その道筋がわかるように示した．

数学は，自らが考え問題を解くことによって理解が深まるものである．本書を活用することで，自分で考える習慣を身につけ，『線形代数』で学習する内容の理解をより確実なものにしてほしい．また，大学編入試験対策にも役立つことを願っている．

2012 年 10 月

高専テキストシリーズ　執筆者一同

目　次

第1章 ベクトルと図形

1 ベクトル

まとめ

1.1 **ベクトル**：平面または空間の 2 点 A, B に対して，A から B へ，という向きが定められた線分を**有向線分**AB という．平行移動によって重ね合わせることができる有向線分をすべて等しいものと考えるとき，これを**ベクトル**という．ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{a}$ などで表す．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が等しいことを，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とかく．

1.2 **ベクトルの向きと大きさ**：ベクトルの大きさは $|\boldsymbol{a}|$ や $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ などで表す．大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{0}$ で表す．$\boldsymbol{a}$ と大きさが同じで向きが逆のベクトルを $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ で表す．

1.3 **ベクトルの実数倍**：実数 t とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，ベクトル $t\boldsymbol{a}$ を

$t > 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と同じ向きで，大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の t 倍であるベクトル

$t = 0$ のとき，零ベクトル $\boldsymbol{0}$

$t < 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と逆の向きで，大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の $|t|$ 倍であるベクトル

として定め，これを $\boldsymbol{a}$ の**実数倍**または**スカラー倍**という．とくに，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ であり，$|t\boldsymbol{a}| = |t||\boldsymbol{a}|$ が成り立つ．

1.4 **ベクトルの平行条件**：$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a} \text{ となる実数 } t\ (t \neq 0) \text{ が存在する}$$

1.5 **同じ向きの単位ベクトル**：$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである．

1.6 **ベクトルの和と差**：2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形 OACB を作るとき，その対角線 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として定める．また，差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ として定める．

1.7 **2 点を結ぶベクトル**：$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して，次の式が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

1.8 **ベクトルの演算の基本法則**：ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ と実数 h, k について，次が成り立つ．

(1) 交換法則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 結合法則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\quad h(k\boldsymbol{a}) = (hk)\boldsymbol{a}$

(3) 分配法則：$h(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = h\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{b}$, $\quad (h+k)\boldsymbol{a} = h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$

(4) 零ベクトルの性質：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $\quad 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\quad h\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

(5) 逆ベクトルの性質：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

1.9 **位置ベクトル**：平面または空間の 1 点 O を定めるとき，任意の点 P に対してベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 O に関する点 P の**位置ベクトル**という．

1.10 **内分点の位置ベクトル**：2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とする．線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とするとき，A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p} = \dfrac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{m+n}$ が成り立つ．

1.11 **2 点間の距離**：座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ の間の距離は，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

である．とくに，原点 O と点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ の距離は，$\mathrm{OA} = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$ である．

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ の間の距離は，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

である．とくに，原点 O と点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ の距離は，$\mathrm{OA} = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$ である．

1.12 ベクトルの成分：座標軸方向の単位ベクトルを**基本ベクトル**という．

(1) 座標平面の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とするとき，$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と表し，$\boldsymbol{a}$ の**成分表示**という．

(2) 座標空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とするとき，$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と表し，$\boldsymbol{a}$ の**成分表示**という．

1.13 ベクトルの和・差，実数倍の成分表示：t を実数とするとき，次が成り立つ．ただし，複号同順とする．

(1) 平面ベクトルの場合

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix}$$

(2) 空間ベクトルの場合

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix}$$

1.14 ベクトルの大きさ：ベクトルの大きさは次のようになる．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき　$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のとき　$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

1.15 方向ベクトルによる直線のベクトル方程式：点 A を通り，ベクトル $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) と平行な直線のベクトル方程式は，

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$$

である．ここで，$\boldsymbol{a}$ は点 A の位置ベクトル，t は**媒介変数**，$\boldsymbol{v}$ は直線の**方向ベクトル**である．

1.16 直線の方程式：

(1) 座標平面において，点 (a_1, a_2) を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の直線の**媒介変数表示**は

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

であり，$v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ のとき，

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

となる．

(2) 座標空間において，点 (a_1, a_2, a_3) を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ の直線の**媒介変数表示**は

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

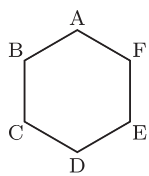
であり，$v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ のとき，

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

となる．

A

Q1.1　右図の正六角形 ABCDEF において，次のベクトルをすべて求めよ．

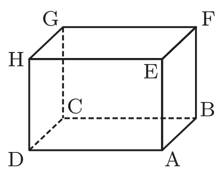


(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と等しいベクトル

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトル

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と大きさが等しいベクトル

Q1.2　右図の直方体 ABCD-EFGH において，次のベクトルをすべて求めよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と等しいベクトル

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトル

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ と大きさが同じベクトル

Q1.3 次のようなベクトルを求めよ.

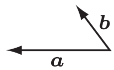
(1) $\boldsymbol{a}$ が単位ベクトルのとき，$\boldsymbol{a}$ と平行で大きさが 3 のベクトル

(2) $|\boldsymbol{a}| = 3$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが 10 のベクトル

(3) $|\boldsymbol{a}| = 4$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と逆向きの単位ベクトル

(4) $|\boldsymbol{a}| = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが $\dfrac{1}{2}$ のベクトル

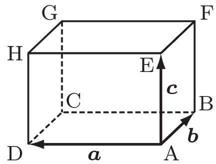
Q1.4 右図のようなベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，次のベクトルを作図せよ.



(1) $2\boldsymbol{a}$ (2) $-2\boldsymbol{b}$ (3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

(4) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (5) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ (6) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$

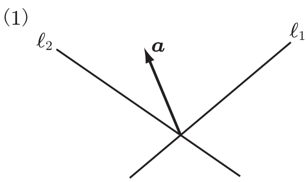
Q1.5 右図の直方体 ABCD-EFGH で，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とするとき，次のベクトルと等しいベクトルをすべて求めよ.

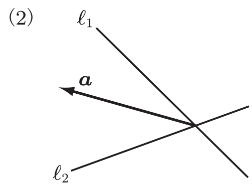


(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (2) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ (3) $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (5) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ (6) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

Q1.6 次の図のベクトル $\boldsymbol{a}$ を，直線 ℓ_1, ℓ_2 方向のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ に分解し，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を作図せよ.





Q1.7 $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y} = 4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ のとき，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(1) $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}$ (2) $\boldsymbol{y}-4\boldsymbol{x}$ (3) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{x}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{y}$

Q1.8 2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき，線分 AB を次のように内分する点の位置ベクトルを，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(1) $3:2$ (2) $5:3$ (3) $3:5$

Q1.9 3 点 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(-2,-2), \mathrm{C}(4,-6)$ に対して，次の 2 点間の距離を求めよ．ただし，O は原点とする.

(1) AB (2) BC (3) OB

Q1.10 $\mathrm{A}(2,-3,4)$ に対して，次の点の座標を求めよ.

(1) 点 A を通って yz 平面に平行な平面が x 軸と交わる点 B

(2) 点 A を通って xz 平面に平行な平面が y 軸と交わる点 C

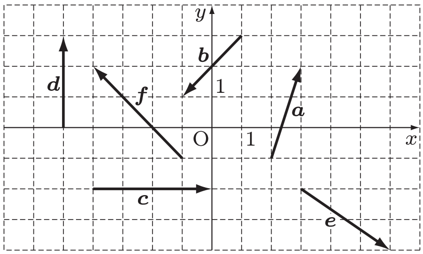
(3) 点 A を通って yz 平面に垂直な直線が yz 平面と交わる点 D

(4) 点 A を通って zx 平面に垂直な直線が zx 平面と交わる点 E

Q1.11　$\mathrm{A}(-1, 3, 4)$, $\mathrm{B}(0, 2, -2)$, $\mathrm{C}(3, -1, -1)$ に対して，次の 2 点間の距離を求めよ．ただし，原点を O とする．

(1) AB　　(2) BC　　(3) OB

Q1.12　次の図において，各ベクトルの成分表示を求めよ．ただし，1 目盛は 1 とする．



Q1.13　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ であるとき，次のベクトルの成分表示を求めよ．

(1) $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$　　(2) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$

Q1.14　次のベクトルの成分表示を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(-3, 1)$, $\mathrm{B}(2, 5)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2) $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(4, -7)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

(3) $\mathrm{A}(1, 0, -3)$, $\mathrm{B}(-2, 4, 0)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(4) $\mathrm{A}(5, 6, 1)$, $\mathrm{B}(0, -1, 1)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

Q1.15　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき，次のベクトルの成分表示を求めよ．

(1) $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$　　(2) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$　　(3) $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$

Q1.16　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき，次のベクトルの大きさを求めよ．

(1) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$　　(2) $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$　　(3) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$

Q1.17　$\mathrm{P}(2, 3, -5)$, $\mathrm{Q}(-1, 2, 3)$ のとき，次のベクトルの大きさを求めよ．ただし，原点を O とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

Q1.18 次のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が互いに平行であるとき，実数 k, l の値を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ k+2l \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k-l \\ 3 \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} k-l \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ k+l \end{pmatrix}$

Q1.19 次の点 A を通り，$\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする直線のベクトル方程式，媒介変数表示，媒介変数を消去した方程式を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(1,-2), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　(2) $\mathrm{A}(1,-3), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{A}(3,2,1), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(4) $\mathrm{A}(-1,2,1), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q1.20 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(2,-3)$　(2) $\mathrm{A}(-2,3), \mathrm{B}(3,1)$

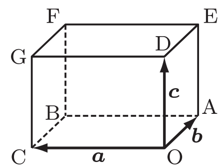
(3) $\mathrm{A}(1,-4,2), \mathrm{B}(3,-1,-3)$　(4) $\mathrm{A}(2,4,3), \mathrm{B}(3,2,1)$

(5) $\mathrm{A}(2,4,3), \mathrm{B}(3,2,3)$　(6) $\mathrm{A}(2,0,3), \mathrm{B}(2,1,-1)$

B

Q1.21 右図のような直方体で，長方形 DEFG の対角線の交点を L，ODGC の対角線の交点を M，CGFB の対角線の交点を N とする．$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の各点の点 O に対する位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を用いて表せ．

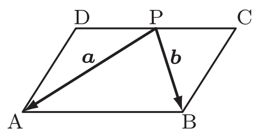
☞ まとめ 1.9, 1.10, Q1.5



(1) B　(2) E　(3) F　(4) L　(5) M　(6) N

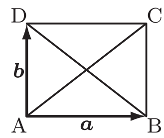
Q1.22 右図のように，平行四辺形 ABCD の辺 CD の中点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{b}$ とするとき，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で表せ．

☞ まとめ 1.7



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Q1.23　右図のように，長方形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{b}$ とおく．$|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ であるとき，次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ．　☞ **まとめ** 1.5, Q1.3



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

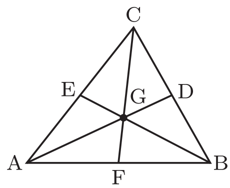
Q1.24　正方形 OABC について，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．$|2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| = 3$ であるとき，この正方形の 1 辺の長さを求めよ．　☞ **まとめ** 1.2, 1.6

Q1.25　3 点 A, B, C について，線分 BC の中点を M，線分 AB を 3 : 4 に内分する点を N とする．点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき，次の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で表せ．　☞ **まとめ** 1.10, Q1.8

(1) 線分 AM を 3 : 2 に内分する点 P　　(2) 線分 CN を 7 : 3 に内分する点 Q

例題 1.1　△ABC の 3 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とするとき，3 つの線分 AD, BE, CF は 1 点 G で交わり，

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = \mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{CG} : \mathrm{GF} = 2 : 1$$



が成り立つ．点 G を △ABC の**重心**という．

3 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき，点 G の位置ベクトルが $\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ であることを示せ．

解　点 G, D の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{d}$ とすると，$\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ であり，$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = 2 : 1$ であるから，

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{d}}{2 + 1} = \frac{\boldsymbol{a} + 2 \cdot \dfrac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{2}}{3} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}$$

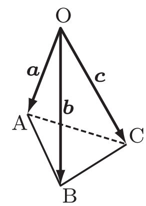
となる．したがって，点 G の位置ベクトルは $\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ である．

Q1.26　△ABC の辺 BC, CA, AB を $m : n$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする．A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．

(2) △DEF の重心の位置ベクトルを，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．

Q1.27 右図のような三角錐 O-ABC において，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，次の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を用いて表せ．



(1) △OAB の重心 G　(2) △OBC の重心 H
(3) △OAC の重心 I　(4) △GHI の重心 J

Q1.28 △ ABC の辺 AB の中点を M，線分 MC の中点を D とし，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

☞ まとめ 1.4, 1.10

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．
(2) 3 点 A, D, E は同一直線上にあることを示せ．

Q1.29 点 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(-1, 4)$, $\mathrm{C}(x, 3)$, $\mathrm{D}(1, y)$ について，次の条件を満たすような x, y の値を求めよ．

☞ まとめ 1.4, 1.13

(1) 3 点 A, B, C が同一直線上にある．　(2) 四角形 ABCD は平行四辺形である．

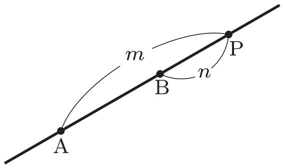
例題 1.2 2 点 A, B を結ぶ直線上において，線分 AB の外側で $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : n$ $(m \neq n)$ となる点 P を，AB を $m : n$ に**外分**する点という．A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$ とするとき，$\boldsymbol{p} = \dfrac{-n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{m - n}$ であることを証明せよ．

解 原点を O とする．$m > n$ のとき，次の左図のように $\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = m : (m - n)$ であるから，

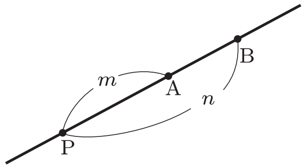
$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a} + \frac{m}{m-n}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{-n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{m-n}\end{aligned}$$

$m < n$ のとき，次の右図のように $\mathrm{BP} : \mathrm{BA} = n : (n - m)$ であるから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{n}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{b} + \frac{n}{n-m}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \frac{n\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{b}}{n-m} \\ &= \frac{-n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{m-n}\end{aligned}$$



$m > n$ の場合



$m < n$ の場合

Q1.30　点 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(-1, 4)$ のとき，次の点の座標を求めよ．

(1) AB を $2:3$ の比に外分する点　　(2) BA を $3:1$ の比に外分する点

Q1.31　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるとき，次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分で表示せよ．　☞ **まとめ 1.13, Q1.13**

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{b}$　　(2) $2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

Q1.32　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とし $\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とする．ただし，t は定数である．　☞ **まとめ 1.13, 1.14**

(1) $\boldsymbol{c}$ を成分で表せ．

(2) $|\boldsymbol{c}|$ が最小となる t の値とその最小値を求めよ．

Q1.33　2 点 A, B を通る直線のベクトル方程式は，A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，直線上の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ として，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ と表される．点 P が次の位置にあるとき，対応する t の値を求めよ．　☞ **まとめ 1.15**

(1) 点 A　　(2) 点 B

(3) 線分 AB の中点　　(4) 線分 AB を $1:2$ に内分する点

Q1.34　平行四辺形 OACB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とするとき，次の直線のベクトル方程式を求めよ．ただし，直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とし，媒介変数を t とせよ．　☞ **まとめ 1.15**

(1) 直線 AB　　(2) 直線 OC

(3) 直線 BC　　(4) 点 C を通り AB に平行な直線

Q1.35　直方体 OABC-DEFG において，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の直線のベクトル方程式を求めよ．ただし，直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とし，媒介変数を t とせよ．　☞ **まとめ 1.15**

(1) 直線 DF　　(2) 直線 EG　　(3) 直線 CE

Q1.36 次の直線の方程式を求めよ. ☞ **まとめ 1.16**

(1) 点 $(3,2,1)$ を通り，直線 $\ell: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z-2$ と平行な直線

(2) 点 $(2,-3,-1)$ を通り，2 点 $(3,-1,4), (-2,3,1)$ を通る直線と平行な直線

例題 1.3 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でないとき，次のことを示せ.

(1) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば $x = y = 0$ であること.

(2) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$ ならば $x = x'$ かつ $y = y'$ であること.

証明 (1) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする. $x \neq 0$ であったとすると，$\boldsymbol{a} = -\dfrac{y}{x}\boldsymbol{b}$ となり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行である. これは仮定に反するので，$x = 0$ でなければならない. このとき，$y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ であるから $y = 0$ となる.

(2) $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$ ならば，$(x-x')\boldsymbol{a} + (y-y')\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる. (1) の結果から，$x - x' = y - y' = 0$ であるから，$x = x'$ かつ $y = y'$ が得られる. **証明終**

なお，(1) の条件を満たすベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立であるという（まとめ 5.10 参照）.

例題 1.4 $\triangle$OAB について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とする. 辺 AB の中点を M，OB を $2:3$ に内分する点を P，線分 AP と線分 OM の交点を Q とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{OQ} : \mathrm{QM} = t : (1-t)$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $t, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(2) $\mathrm{AQ} : \mathrm{QP} = s : (1-s)$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $s, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

解 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{t}{2}\boldsymbol{a} + \dfrac{t}{2}\boldsymbol{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{2}{5}\boldsymbol{b}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\boldsymbol{a} + \dfrac{2s}{5}\boldsymbol{b}$

(3) (1), (2) の結果から，

$$\frac{t}{2}\boldsymbol{a} + \frac{t}{2}\boldsymbol{b} = (1-s)\boldsymbol{a} + \frac{2s}{5}\boldsymbol{b}$$

である. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行でないから，$\dfrac{t}{2} = 1-s$, $\dfrac{t}{2} = \dfrac{2s}{5}$ が成り立つ. これを解いて，$s = \dfrac{5}{7}, t = \dfrac{4}{7}$ となる. したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{2}{7}\boldsymbol{a} + \dfrac{2}{7}\boldsymbol{b}$

Q1.37 $\triangle$OAB において，辺 OA を $3:1$ に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で表せ.

Q1.38　平行四辺形 OACB において，辺 BC の中点を M，辺 AC の中点を N，線分 OM と線分 BN の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を s, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表せ．

(3) $\mathrm{BP} : \mathrm{PN} = t : (1-t)$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表せ．

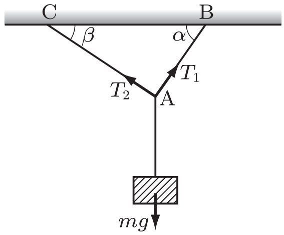
(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で表せ．

Q1.39　平面上に，原点とは異なる 2 点 A, B をとる．平面上の点 P について，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ．　☞ まとめ 1.15

(1) 点 P は直線 AB 上にある．

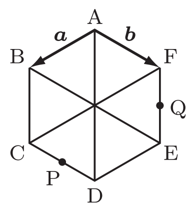
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $a + b = 1$ を満たす実数 a, b がある．

Q1.40　右図のように，重さ m [kg] の物体が，天井から 2 本のひもで引っ張られてつりあっている．$\angle\mathrm{ABC} = \alpha$, $\angle\mathrm{ACB} = \beta$ とするとき，張力 T_1, T_2 の大きさを求めよ．ただし，物体に働く重力の大きさは，重力加速度を g として mg [N] である．　☞ Q1.6



C

Q1.41　正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \boldsymbol{b}$ とし，辺 CD の中点を点 P，辺 EF の中点を点 Q とする．以下の問いに答えよ．　（類題：大阪大学）



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表せ．

(3) 線分 CQ と線分 FP の交点を点 R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表せ．

(4) 線分 AR と対角線 CF の交点を点 S とするとき，CS : SF を求めよ．

Q1.42　四面体 OABC において，線分 AB の中点を P，線分 CP の中点を Q，線分 OQ の中点を R とする．また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．　（類題：東京大学）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．

付録A ベクトル空間

まとめ

A.1 **ベクトル空間**：集合 V に実数倍と和が定義されていて，V の任意の要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と，任意の実数 h, k に対して次の (1)〜(6) が成り立つとき，V をベクトル空間または**線形空間**という．

(1) 交換法則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 結合法則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), \quad (hk)\boldsymbol{a}=h(k\boldsymbol{a})$

(3) 分配法則：$h(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=h\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{b}, \quad (h+k)\boldsymbol{a}=h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$

(4) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(5) 零ベクトルとよばれる要素 $\boldsymbol{0}$ がただ 1 つ存在して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(6) $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルとよばれる要素 $-\boldsymbol{a}$ がただ 1 つ存在して，
$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

A.2 $\mathbb{R}^n$：実数全体の集合を $\mathbb{R}$，n 次元列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す．$\mathbb{R}^n$ はベクトル空間である．

A.3 **部分空間**：ベクトル空間 V の部分集合 W が，V の実数倍と和によって

$$k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in W \quad \text{ならば} \quad k\boldsymbol{p} \in W,\ \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} \in W$$

を満たすとき，W は V の**部分空間**であるという．

A.4 **ベクトル空間の基底と次元**：ベクトル空間 V について，次の性質を満たすベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を V の**基底**という．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立である．

(2) V の任意の要素 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合として表すことができる．

n は基底のとり方によらない．n を V の**次元**といい，$\dim V$ で表す．

A.5 **斉次連立 1 次方程式の解空間**：斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

の解全体の集合は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．これを①の**解空間**という．

A.6 **ベクトルが張る部分空間**：$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V のベクトルとするとき，V の部分空間

$$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

を，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が**張る部分空間**という．

A.7 **線形写像の線形性**：ベクトル空間 V からベクトル空間 U への写像 f が，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 k について，次の等式を満たすとき，f を**線形写像**という．

(1) $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$　　(2) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

とくに，V から V への線形写像を**線形変換**という．

A.8 **線形写像**：$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 f が，

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ x'_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

で表されるとき，f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像となる．この式を行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表したとき，$m \times n$ 型行列 (a_{ij}) を線形写像 f の**表現行列**という．

A.9 線形写像の核と像：ベクトル空間 V からベクトル空間 U への線形写像 f について，次が成り立つ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ は V の部分空間である．

(2) f の像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ は U の部分空間である．

このとき，次の等式が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$$

A

Q-A.1 次の集合 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるかどうか調べよ．

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \, a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} c + d \\ c + 2d \\ c + 3d \end{pmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Q-A.2 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W について，基底を 1 組求めよ．また，部分空間の次元を答えよ．

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2c \\ c \\ -3c \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b \\ a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Q-A.3 次の連立方程式の解空間の基底を 1 組あげ，解空間の次元を求めよ．

(1) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + z + 5w = 0 \\ -3x + y - 10z - w = 0 \\ 2x - y + 7z = 0 \end{cases}$

Q-A.4 次のベクトルが張る部分空間の基底を 1 組あげ，その次元を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

Q-A.5 次の行列を表現行列とする線形写像 f の核と像について，それぞれの基底を 1 組ずつあげよ．また，それぞれの次元を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -9 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

B

Q-A.6　次の線形変換または線形写像について，核の次元を求めて基底を 1 つあげよ．また，像の次元を求めて基底を 1 つあげよ．

☞ まとめ A.4, Q-A.5

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 9 & -7 & -7 \\ 12 & -13 & -10 \end{pmatrix}$ を表現行列とする $\mathbb{R}^3$ の線形変換

(2) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 & 7 \\ 5 & 2 & -7 & -4 \\ 2 & -3 & -13 & 3 \\ 8 & 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}$ を表現行列とする $\mathbb{R}^4$ の線形変換

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像

C

Q-A.7　実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を V とする．行列の和と実数倍を考えるとき，V はベクトル空間となる．次の問いに答えよ．

（類題：首都大学東京，筑波大学）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が線形独立であるかどうか調べよ．

(2) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，

$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4)$ が V の基底であることを示せ．

Q-A.8 線形写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$ で定めるとき，f の表現行列を求めよ． （類題：広島市立大学）

Q-A.9 写像 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y+4z \\ x+y-z \end{pmatrix}$ で定める．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と, $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ． （類題：埼玉大学）

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1)\ T(\boldsymbol{a}_2)\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2×3 型行列 A を求めよ．

Q-A.10 n を自然数とし, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線形変換とするとき, $\mathrm{Im}(f^m) = \mathrm{Im}(f^{m+1})$ を満たす自然数 m が存在することを示せ．ただし，f^m は f を m 回合成した変換である． （類題：筑波大学）

Q-A.11 ベクトル空間 V において，$(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ は V の基底であるとする．$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ とおくとき，$(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ は V の基底であることを示せ． （類題：神戸大学）

付録B 補遺

まとめ

B.1 クラメルの公式(II):n 個の未知数に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 A が正則であるとき，その解は

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．ここで，A_j は，行列 A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列である．

B.2 2 次曲線:a, b, c, k を定数とするとき，方程式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$$

で表される曲線を **2 次曲線**という．

B.3 2 次曲線の標準形:対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とする．このとき，2 次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 = k$ の**標準形**は，

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k$$

である．さらに，2 次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 = k$ は，次のように分類される．

(1) $\lambda_1\lambda_2 > 0$，かつ k が λ_1 と同符号であるとき，楕円

(2) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $k \neq 0$ であるとき，双曲線

A

Q-B.1　次の 2 次曲線の標準形を求め，楕円か双曲線かを判定せよ．

(1) $x^2 + 6xy + y^2 = 4$　　(2) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$

Q-B.2　2 次曲線 $5x^2 - 26xy + 5y^2 = -72$ の標準形の 1 つを求めよ．また，この 2 次曲線は標準形が表す曲線をどのように回転させたものか答えよ．

B

Q-B.3　クラメルの公式を使って，連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 2y - 3z = -9 \end{cases}$ を解け．

☞ まとめ B.1

Q-B.4　次の問いに答えよ． ☞ まとめ B.3

(1) 2 次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ を原点を中心に θ だけ回転した像の方程式が $px^2 + qy^2 = 1$ の形になるとき，$(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 2 次曲線 $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 1$ を原点を中心に θ だけ回転した像の方程式が $px^2 + qy^2 = 1$ の形になるとき，θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．また，この 2 次曲線の形を答えよ．

C

Q-B.5　行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ を A とする．ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，内積を使って関数を $Q(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}$ と定義する．次の問いに答えよ．　（類題：名古屋工業大学）

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 条件 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = 1$ のもとで，関数 $Q(\boldsymbol{p})$ の最大値と最小値を求めよ．

Q-B.6　2 次曲線 $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 18$ の標準形を求めよ．　（類題：東北大学）

高専の数学教材研究会

編集委員（五十音順）
阿蘇　和寿　石川工業高等専門学校教授［執筆代表］
梅野　善雄　一関工業高等専門学校教授
佐藤　義隆　東京工業高等専門学校名誉教授
長水　壽寛　福井工業高等専門学校教授
馬渕　雅生　八戸工業高等専門学校准教授
柳井　忠　　新居浜工業高等専門学校教授

執筆者（五十音順）
阿蘇　和寿　石川工業高等専門学校教授
梅野　善雄　一関工業高等専門学校教授
大貫　洋介　鈴鹿工業高等専門学校准教授
小原　康博　熊本高等専門学校教授
片方　江　　一関工業高等専門学校講師
勝谷　浩明　豊田工業高等専門学校教授
栗原　博之　八戸工業高等専門学校准教授
古城　克也　新居浜工業高等専門学校准教授
小中澤聖二　東京工業高等専門学校教授
小鉢　暢夫　熊本高等専門学校准教授
小林　茂樹　長野工業高等専門学校教授
佐藤　巌　　小山工業高等専門学校教授
佐藤　直紀　長岡工業高等専門学校准教授
佐藤　義隆　東京工業高等専門学校名誉教授
高田　功　　明石工業高等専門学校教授
徳一　保生　北九州工業高等専門学校教授
冨山　正人　石川工業高等専門学校准教授
長岡　耕一　旭川工業高等専門学校教授
中谷　実伸　福井工業高等専門学校准教授
長水　壽寛　福井工業高等専門学校教授
波止元　仁　東京工業高等専門学校講師
松澤　寛　　沼津工業高等専門学校講師
松田　修　　津山工業高等専門学校教授
馬渕　雅生　八戸工業高等専門学校准教授
宮田　一郎　金沢工業高等専門学校教授
森田　健二　石川工業高等専門学校准教授
森本　真理　秋田工業高等専門学校准教授
安冨　真一　東邦大学教授
柳井　忠　　新居浜工業高等専門学校教授
山田　章　　長岡工業高等専門学校准教授
山本　茂樹　茨城工業高等専門学校教授
渡利　正弘　津山工業高等専門学校講師

監修者
上野　健爾　京都大学名誉教授・四日市大学関孝和数学研究所長
　　　　　　理学博士

編集担当　上村紗帆(森北出版)
編集責任　石田昇司(森北出版)
組　　版　ウルス
印　　刷　創栄図書印刷
製　　本　　同

高専テキストシリーズ
線形代数問題集

2012 年 11 月 29 日　第 1 版第 1 刷発行

編　　者　高専の数学教材研究会
発 行 者　森北博巳
発 行 所　**森北出版株式会社**
東京都千代田区富士見 1–4–11(〒102–0071)
電話 03–3265–8341 / FAX 03–3264–8709
http://www.morikita.co.jp/
日本書籍出版協会·自然科学書協会·工学書協会　会員
JCOPY <(社)出版者著作権管理機構 委託出版物>

落丁·乱丁本はお取替えいたします.

Printed in Japan/ISBN978–4–627–05601–5